

COLEÇÃO F. T. D.

ALGEBRA

ELEMENTAR

PARA USO

das escolas primarias e secundarias
segundo os programas do Collegio Pedro II
das Escolas Normais, etc.

CURSO MÉDIO

(Segua a orthographia official)



LIVRARIA PAULO DE AZEVEDO & C^ª

106, Rua do Ouvidor

RIO DE JANEIRO

49A, Rua Libero Badari

SÃO PAULO

BELO HORIZONTE, Rua da Baía, 1052

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS

ma 1/2
COLEÇÃO F. T. D.

Jul 1935
ALGEBRA

ELEMENTAR

PARA USO

das escolas primarias e secundarias
segundo os programas do Colégio Pedro II
das Escolas Normais, etc.

CURSO MÉDIO



LIVRARIA PAULO DE AZEVEDO & C^a

105, Rua do Ouvidor
RIO DE JANEIRO

19A, Rua Libero Badurô
SÃO PAULO

BELO HORIZONTE, Rua da Baía, 1052

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS

NIEL OSTAT,
S. Paulo, 28 Julho 1926.

Can. Dor, MARTINS LACERDA, Genitor.

IMPRIMA-SP.
S. Paulo, 22 Julho 1926
Mocim, FERRAZ BARROS,
pro-Vigário Geral.

NA MESMA COLEÇÃO

CÁLCULO

Caderno de Algorismos.

Primeiro Livro do Cálculo, ensino intuitivo da numeração e 4 operações, ilustrado.

Exercícios de Cálculo, sem problemas, sobre as 4 operações.

800 Problemas sobre as 4 operações, para principiantes.

Exercícios de cálculo, com problemas, sobre as 4 operações.

Parte do mestre, a mesma para os 3 livros precedentes.

ARITMÉTICA

Aritmética, curso preparatório, numeração, 4 contas, sistema métrico.

O mesmo livro, parte do mestre.

Aritmética, e. elementar, admissão nos ginásios.

O mesmo livro, parte do mestre.

Aritmética, curso secundário, prog. ginásio completo.

O mesmo livro, parte do mestre.

Aritmética, curso superior, admissão às Escolas Superiores.

O mesmo livro, parte do mestre.

ÁLGEBRA

Noções de Álgebra, curso elementar, prog. do 1.º e do 2.º ano gin.

O mesmo livro, parte do mestre.

Álgebra, curso médio, programa gin. completo.

O mesmo livro, parte do mestre.

Álgebra, e. sup., adm. a todas as Escolas Superiores.

O mesmo livro, parte do mestre.

Complementos de Álgebra, programa do 4.º ano gin.

O mesmo livro, parte do mestre.

GEOMETRIA

Geometria, curso elementar, prog. do 1.º ano ginásio.

O mesmo livro, parte do mestre.

Geometria, curso médio, prog. do 2.º ano gin., admissão às Escolas Superiores.

O mesmo livro, parte do mestre.

Geometria, curso sup., admissão a todas as Escolas Superiores.

O mesmo livro, parte do mestre.

TRIGONOMETRIA — LOGARITMOS

Trigonometria elementar, programa oficial completo.

O mesmo livro, parte do mestre.

Novas taboas de Logaritmos a 2 decimais, de 1 até 10.000, e das funções trigon.

ENSINO COMERCIAL

Escrita comercial, curso médio, para principiantes.

O mesmo livro, parte do mestre.

Curso de estenografia, alfabeto Duployé.

Princípios e regras de estenografia, alfabeto Duployé.

Reservados todos os direitos.

ÁLGEBRA, CURSO MEDIO

CÁLCULO ALGÉBRICO

NÚMEROS ALGÉBRICOS

§ I. — Noções preliminares.

1.ª Insuficiência dos números aritméticos. — Os números aritméticos não permitem avaliar certas grandezas com exatidão suficiente.

Com efeito, se dissermos, por exemplo :

1.º A temperatura de tal corpo é de 10º ;

2.º A altitude de um ponto dado é de 250 m. ;

3.º Tal acontecimento se deu no anno 54 ;

4.º Sobre uma linha dada, o ponto B dista de 5 m. do ponto A, exprimimos idéas incompletas.

A exatidão exige que digamos :

1.º A temperatura é de 10º acima ou abaixo de 0º ;

2.º A altitude é de 250 m. acima ou abaixo do nível do mar ;

3.º Tal acontecimento se deu 54 anos antes ou depois do começo do tal era ;

4.º O ponto B dista de 5 m. á direita ou á esquerda do ponto A

2.ª Números algébricos. — Querendo determinar o sentido em que se deve avaliar uma grandeza, antepõe-se ao número aritmético, que mede essa grandeza, o sinal + ou o sinal —.

Nota. — Aqui os sinais + e — não têm significação aditiva ou subtrativa : apenas designam um sentido e são inseparavelmente unidos aos números aritméticos transformando-os, desta arte, em números algébricos.

Os números aritméticos precedidos do signal + são números positivos. Os números aritméticos precedidos do signal — são números negativos.

O conjunto dos números positivos e dos números negativos, inclusive zero, representa os *números algébricos*, chamados ainda *números orientados*, *qualificados* ou *relativos*.

3a. **Valor absoluto de um número algébrico.** — É o número aritmético obtido suprimindo o sinal.

Representa-se o *valor absoluto* de um número algébrico, pondo esse número entre dois riscos verticais. Por exemplos :

$$|+5|=5 \text{ e } |-2|=2,$$

expressões que se lêem :

O valor absoluto de $+5$ é 5.

O valor absoluto de -2 é 2.

Observação. — I. Por convenção, qualquer número positivo iguala seu valor absoluto : $+4=4$.

Observação. — II. Numa série ilimitada de números positivos, como : $+1, +5, +50, +500, +5000 \dots +\infty$, por convenção representa-se o maior pelo símbolo $+\infty$ (*mais o infinito*).

Numa série ilimitada de números negativos, como $-1, -5, -50, -500 \dots -\infty$, por convenção, representa-se o maior em valor absoluto pelo símbolo $-\infty$ (*menos o infinito*).

4a. **Números iguais, desiguais, opostos.** — Dois números algébricos são iguais quando têm mesmo valor absoluto e mesmo sinal.

Entre os dois, põe-se o sinal $=$ (que se lê *igual*).

Podemos escrever : $+4 = +4$; $-2 = -2$.

Dois números algébricos são desiguais quando não têm mesmo valor absoluto ou mesmo sinal.

Entre os dois, põe-se o sinal \neq (*diferente de*).

Podemos escrever :

$$+4 \neq +5; \quad +2 \neq -1.$$

Dois números algébricos são opostos quando têm mesmo valor absoluto e sinais contrários.

Ex. : $+5$ e -5 .

5a. **Representação gráfica dos números algébricos.** — Suponhamos uma reta ilimitada $X'X$ (fig. 1); marquemos um ponto fixo O sobre essa reta; esse ponto se chama : *origem*.

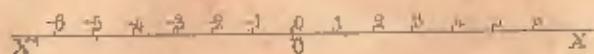


FIG. 1.

Por convenção, consideramos o sentido OX como *positivo* e o sentido OX' como *negativo*. A reta $X'X$ é um *eixo dirigido*, isto é, um eixo sobre o qual estabeleceremos um sentido.

A *direita* do ponto O, levemos certo numero de vezes um comprimento, tomado como unidade, teremos pontos cuja *abscissa* (isto é, a distância ao ponto O) é : $+1, +2, +3, +4, +5, +6$, etc...

A *esquerda* do ponto O, levemos certo numero de vezes a mesma unidade de comprimento e teremos pontos cuja *abscissa* é : $-1, -2, -3, -4, -5, -6$...

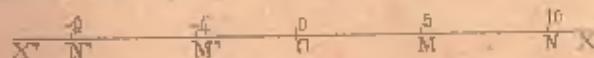


FIG. 2.

No eixo dirigido acima, considerando o *segmento* (parte de reta) OM, a abscissa do ponto M sendo $+5$; diramos que o segmento $OM = +5$ é um *segmento positivo*.

Considerando o segmento OM' , a abscissa do ponto M' sendo -4 , teremos $OM' = -4$; OM' é um *segmento negativo*.

O segmento MN tem por origem o ponto M (abscissa, $+5$), e sua extremidade no ponto N (abscissa, $+10$); tem mesmo sentido que OM, é segmento positivo e temos : $MN = +5$.

O segmento M'N', de mesmo sentido que OM', é segmento negativo e temos : $M'N' = -5$ (fig. 2).

6a. **Consequências.** — 1.º Dados três pontos sobre um eixo dirigido : A, B, C, (fig. 3) teremos sempre :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Seja o eixo dirigido $X'X$ e os pontos A, B, C, sobre esse eixo.

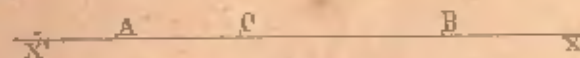


FIG. 3.

De A a B se tivermos uma distância de 7 cm.; de B a C se tivermos 4 cm., os respectivos comprimentos dos segmentos dados serão (não esqueçamos o sentido) :

$$\overline{AB} = +7; \quad \overline{BC} = -4; \quad \overline{CA} = -3.$$

Somando, teremos :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = +7 - 4 - 3 = 0.$$

2.º Dado um segmento MM' sobre um eixo dirigido, de origem

O (fig. 4), o valor algébrico desse segmento é igual à abscissa de sua extremidade diminuída da abscissa de sua origem.

Seja o eixo dirigido $X'X$, o ponto de origem O e segmento MM' tal que a abscissa do ponto M seja $+2$ e a do ponto M' , $+7$.



FIG. 4.

Teremos: $\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = +5$.

Com efeito, a relação da consequência precedente dá:

$$\overline{OM} + \overline{MM'} + \overline{M'O} = 0.$$

A acrescentamos a ambos os membros dessa igualdade a expressão: $\overline{OM} - \overline{OM}$, teremos:

$$\overline{OM} + \overline{MM'} + \overline{M'O} + \overline{OM} - \overline{OM} = \overline{OM} - \overline{OM}.$$

Simplificando o primeiro membro, teremos:

$$\overline{MM'} - \overline{OM} - \overline{OM},$$

porque

$$\overline{OM} - \overline{OM} = 0,$$

e

$$\overline{M'O} + \overline{OM} = 0.$$

§ II. — Adição dos números algébricos.

7a. Definição. — Soma algébrica de dois números é o resultado obtido somando o valor absoluto desses números, se tiverem o mesmo sinal ou diminuindo seu valor absoluto, se tiverem sinais contrários, dando ao resultado o sinal do número que tiver maior valor absoluto.

Aplicamos essa definição nos exemplos seguintes e teremos:

$$(+4) + (+6) = +10,$$

$$(-4) + (-6) = -10,$$

$$(+6) + (-4) = +2,$$

$$(-6) + (+4) = -2.$$

8a. Regra. — Para somar vários números algébricos devemos

1.º Somar todos os números positivos;

2.º Somar todos os números negativos;

3.º Subtrair os resultados, dando à diferença o sinal do número que tiver o maior valor absoluto.

Aplicamos essa regra aos exemplos seguintes:

$$a) (+2) + (+5) + (+7) = +14.$$

$$b) (-2) + (-5) + (-7) = -14.$$

$$c) (+7) + (+1) + (-2) + (-5) + (+11) + (-7) = +14.$$

$$d) (-7) + (-4) + (+2) + (+5) + (-11) + (-7) = -14.$$

$$e) (-5) + (-2) + (-3) + (+4) + (-1) + (+6) + (-8) = -14.$$

9a. Observação. — Certas propriedades dos números aritméticos, estudadas em aritmética, aplicam-se também aos números algébricos. Eis as principais:

1.º Numa soma de números algébricos, podemos inverter a ordem dos termos.

No exemplo do N.º precedente (letra a), invertendo a ordem dos termos, chegamos ao mesmo resultado.

$$(-2) + (+1) + (+5) + (-3) + (-1) + (-7) + (+6) = +14.$$

2.º Numa soma de números algébricos, podemos substituir vários termos por sua soma.

No exemplo precedente (letra a) substituindo o 1.º e o 2.º termos por sua soma $(+7) + (-4) = (+3)$, e o 3.º mais o 4.º também por sua soma $(-2) + (-5) = (-7)$, teremos:

$$(+3) + (+1) + (-1) = (+3) + (-1) = +2,$$

resultado igual ao precedente.

10a. — Aplicações.

I. — Problema de distâncias. — A distância São Paulo ao Rio é de 500 km (fig. 5). Do Rio a Cruzeiro, há 251 km. De Cruzeiro a Barra do Piraí, há 137 km. De Barra do Piraí a Aparecida, há 100 km. A que distância de S. o Paulo se acha a viajante que fez o percurso:

São Paulo — Rio — Cruzeiro — Barra — Aparecida.



FIG. 5.

Consideremos como positivo o sentido S. Paulo-Rio e como negativo a direção oposta Rio-S. Paulo. A distância S. Paulo-Aparecida será o resultado da soma algébrica dos diversos percursos:

$$(+500) + (-251) + (+137) + (-100) = (+249) + (-150) = +99.$$

A distância procurada é 99 km.

II. — Problema sobre lucros e perdas. — Um jogador ganha 3\$ na primeira partida e 2\$ na segunda; perde 4\$ na

terceira, ganha 1\$500 na quarta, perde 3\$500 na quinta. Quanto ganhou ou perdeu?

Consideremos os lucros como quantidades positivas e as perdas como quantidades negativas.

O resultado final das cinco partidas iguais a soma algébrica dos resultados de cada partida, temos:

$$(+3) + (+2) + (-4) + (+1,500) + (-3,500) \\ = (+0,500) + (-2,500) = -2.$$

Perdeu, portanto, 1\$000.

III. Problema de receitas e despesas. — Um negociante tem 850\$ em caixa. No mesmo dia, recebe 540\$, paga uma conta de 250\$; recebe de um fregues 2:500\$, põe no banco 1:800\$, a esta vende por 500\$ de mercadorias e paga uma letra de 620\$. Quanto tem em caixa no fim desse dia?

Aqui as receitas serão quantidades positivas e as despesas serão quantidades negativas. A situação final da caixa é o resultado da soma algébrica seguinte:

$$(+850) + (+540) + (-250) + (2:500) + (-1:800) + (+500) \\ + (-620) = (+4:300) + (-2:070) = +2:230.$$

O negociante tem em caixa: 2:230\$000.

§ 3. — Subtração dos números algébricos

11a. Definição. — Achar a diferença entre um número a e um número b , é determinar um terceiro número c , o qual somado com b , iguale a , de maneira que tenhamos: $a - b = c$ ou $a = b + c$.

Aplicamos essa definição aos exemplos seguintes, teremos:

$$(+10) - (+7) = +3, \text{ porque } (+7) + (+3) = +10; \\ (+10) - (-7) = +17, \text{ porque } (-7) + (+17) = +10.$$

12a. Regra. — De um número a , para subtrair um número b junta-se a a o número oposto a b .

$$\text{Ex.: } (+10) - (+7) = (+10) + (-7) = +3. \\ (+10) - (-7) = (+10) + (+7) = +17.$$

13a. Observação. — Como na adição, as propriedades dos números aritméticos relativas à subtração, aplicam-se também aos números algébricos. Al vão as principais:

1.º A um número, para acrescentar uma diferença algébrica junta-se o minuendo e tira-se o subtraendo.

Seja o número $(+10)$, acrescentemos-lhe a diferença: $(+7) - (+3)$; teremos:

$$(+10) + (+7) - (+3) = (+17) - (+3) = +14.$$

Esse resultado é identico ao que teríamos achado, se llevamos calculado a diferença $(+7) - (+3) = (+4)$.

para juntá-la a $(+10)$:

$$(+10) + (+4) = (+14).$$

2.º De um número ou de uma soma algébrica, para tirar outra soma algébrica, junta-se a 2.ª soma trocando os sinais dos termos.

a) Seja o número $(+14)$; para tirar a soma $(+3) + (+5) + (-6)$, teremos:

$$(+14) + (-3) + (-5) + (+6) = +12.$$

b) Seja a soma $(+15) + (-2)$; para tirar a soma $(+3) + (+5) + (-6)$, teremos:

$$(+15) + (-2) + (-3) + (-5) + (+6) = +11.$$

14a. Observação. — De quanto acabamos de explicar podemos deduzir:

1.º Uma soma algébrica não muda suprimindo as parenteses precedidos do sinal $+$.

Com efeito, temos:

$$(+15) + (-2) + (-3) + (-5) + (+6) = +11,$$

valores identicos.

2.º É necessário mudar o sinal dos termos entre parenteses, quando suprimimos parenteses precedidos do sinal $-$.

Com efeito, temos:

$$(+8) - (-7) = 8 + 7 = 15,$$

ou ainda $(+8) - (-7 + 2 - 3) = 8 + 7 - 2 + 3 = 16.$

15a. Aplicações.

1. Problema de distâncias. — Dois correios partam de um mesmo ponto O , situado sobre uma rua a seguindo direções opostas. O primeiro percorre 50 km. á direita de O e o segundo percorre 45 km. á esquerda de O . Qual é a distância que os separa?

Consideremos como positivo o deslocamento á direita de O e como negativo o deslocamento á esquerda. O primeiro correio estará á 4-50 km. de O .

O segundo correio estará a -45 km. de O. A distância entre ambos será : $(+50) - (-45) = 50 + 45 = 95$ km.

Nota. — Se os dois correios se movessem à direita de O, a distância entre eles seria $(+50 \text{ km.}) - (+45 \text{ km.}) = 50 - 45 = 5$ km.

II. Problema de temperaturas. — Um termómetro de máxima e mínima marcou como mais alta temperatura 34° acima de zero e como mais baixa temperatura 5° abaixo de zero. Qual é a diferença dessas duas temperaturas?

Consideremos a temperatura acima de zero como positiva e como negativa abaixo de zero.

A diferença entre as temperaturas extremas será de :

$$(+34^\circ) - (-5^\circ) = 34 + 5 = 39^\circ.$$

§ IV. — Multiplicação dos números algébricos.

16a. Definição. — Produto de dois números algébricos é o resultado obtido multiplicando os valores absolutos desses números entre si e dando ao resultado o sinal $+$ ou o sinal $-$ segundo os dois números tiveram mesmos sinais ou sinais contrários.

$$\begin{aligned} \text{Ex. :} \quad & (+7) \times (+5) = +35, \\ & (-7) \times (-5) = +35, \\ & (+7) \times (-5) = -35, \\ & (-7) \times (+5) = -35. \end{aligned}$$

17a. Regra dos sinais. — O produto de dois números positivos é positivo :

$$[+] \times [+] = +.$$

O produto de dois números negativos é positivo :

$$[-] \times [-] = +.$$

O produto de um número positivo por um número negativo é negativo :

$$[+] \times [-] = -.$$

O produto de um número negativo por um número positivo é negativo :

$$[-] \times [+] = -.$$

18a. Produtos de vários números. — Produto de vários números é o resultado obtido multiplicando os valores absolutos desses números e dando ao resultado o sinal $+$ se o número dos factores negativos for nulo ou par e o sinal $-$ se o número dos factores negativos for ímpar.

Podemos escrever :

$$a) (-5) \times (+4) \times (-2) \times (+3) = +120.$$

$$b) (+5) \times (-4) \times (-2) \times (-3) = -120.$$

19a. Potência de um número. — Potência m de um número é o produto de m factores iguais a esse número.

Escrevendo a definição de um produto de varios factores, podemos escrever :

$$(+4)^3 = (+4) \times (+4) \times (+4) = +64.$$

$$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125.$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16.$$

Dando a duzinhos a regra seguinte :

1.º Qualquer potência de um número positivo é positiva ;

2.º Uma potência par de um número negativo é positiva ;

3.º Uma potência ímpar de um número negativo é negativa.

20a. Observação. — As propriedades dos números aritméticos relativas à multiplicação applicam-se também aos números algébricos.

Eis algumas :

1.º Para multiplicar uma soma algébrica por um número multiplica-se cada parcela por esse número e juntam-se os resultados.

Seja a soma algébrica :

$$(+5) + (-2) + (+3)$$

a multiplicar por (-4) .

Multiplicando cada parcela por (-4) , teremos :

$$\begin{aligned} (+5) \times (-4) &= -20 \\ (-2) \times (-4) &= +8 \\ (+3) \times (-4) &= -12 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad -20 + 8 - 12 = -24.$$

Esses resultados são idênticos ao que teríamos obtido efectuando a soma algébrica e multiplicando o resultado por (-4) .

Com efeito :

$$\begin{aligned} (+5) + (-2) + (+3) &= 8 - 2 = 6 ; \\ (+6) \times (-4) &= -24. \end{aligned}$$

2.º Para multiplicar duas somas algébricas entre si, multiplicamos todas as parcelas da primeira successivamente por todas as parcelas da outra, e juntam-se os productos.

Ex. : $[(+5) + (-2) + (+3)] \times [(+7) + (-4)]$.

Aplicamos a regra precedente e teremos :

$$\begin{aligned} [(+5) + (-2) + (+3)] \times (+7) &= (+35) + (-14) + (+21) = +42, \\ [(+5) + (-2) + (+3)] \times (-4) &= -20 + 8 - 12 = -24. \end{aligned}$$

Somando os resultados, temos :

$$(+42) + (-24) = +18.$$

Resultado idêntico ao que teríamos obtido efetuando as duas somas e fazendo depois o produto.

Com efeito :

$$(+5) + (-2) + (+3) = 6, \text{ e } (+7) + (-4) = +3 \\ (+5) \times (+3) = +15.$$

3º Num produto de varios factores algebricos, podemos mudar arbitrariamente a ordem dos factores, sem alterar o produto.

Seja o produto $(-3) \times (+5) \times (+2) \times (-4)$.

Efetuada na ordem indicada, temos :

$$(-3) \times (+5) \times (+2) \times (-4) = +120.$$

Adotando a ordem abaixo, temos também o mesmo resultado :

$$(+2) \times (-4) \times (+5) \times (-3) = +120.$$

4.º O produto de duas ou mais potências de um mesmo número algébrico é outra potência desse número com expoente igual á soma dos expoentes dos factores.

a) Seja o produto : $(-2)^3 \times (-2)^4$, teramos :

$$(-2)^3 \times (-2)^4 = (-2)^{3+4} = (-2)^7 = -128.$$

Resultado idêntico ao que teríamos obtido avaliando separadamente cada factor e multiplicando os resultados, porque $(-2)^3 = -8$ e $(-2)^4 = +16$;

logo : $(-2)^3 \times (-2)^4 = (-8) \times (+16) = -128.$

b) Do mesmo modo, teramos :

$$(+3)^2 \times (+3)^4 \times (+3)^3 = (+3)^{2+4+3} = 3^9 = 19\ 683.$$

31a. — Aplicação.

Problema de movimento. — São 12 horas. Um móvel acha-se sobre uma linha $X'X$ no ponto O ; move-se com velocidade $V=4$ km. por hora, durante um tempo $t=3$ horas. Que espaço o terá percorrido nesse tempo?

Dando a v e a t os valores aritméticos indicados no problema, achamos logo :

$$e = et = 4 \times 3 = 12 \text{ km.}$$

Se considerarmos v e t como números algébricos, de sinal variavel ; se admitirmos que a velocidade v é positiva quando o móvel vai da esquerda para a direita (no sentido da flecha) e negativa no caso contrario ; se admitirmos que o tempo t é positivo depois das 12 horas (meio dia) e negativo antes ; se considerarmos o espaço percorrido como positivo á direita

do ponto O e negativo á esquerda, quatro hipóteses se apresentam :

1.ª Hipótese. — ($v=+4$, $t=+3$) (fig. 6). — É a solução aritmética. O valor de e é positivo e temos :

$$e = et = (+4) \times (+3) = +12 \text{ km.}$$

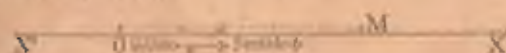


Fig. 6.

2.ª Hipótese. — ($v=-4$, $t=+3$) (fig. 7). — A velocidade é negativa, o móvel vai da direita á esquerda, no sentido negativo.

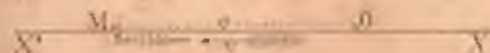


Fig. 7.

temos : $e = (-4) \times (+3) = -12 \text{ km.}$

O valor de e é negativo.

3.ª Hipótese. — ($v=+4$, $t=-3$) (fig. 8). — Como o tempo é negativo, o enunciado do problema será : Em que ponto da reta se achava o móvel, 3 horas antes do meio-dia, sabendo que ia no sentido positivo?

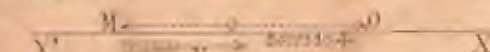


Fig. 8.

Neste caso, teramos :

$$e = (+4) \times (-3) = -12 \text{ km.}$$

As 9 horas antes do meio-dia, o móvel se encontrava em M caminhava no sentido positivo e ás 12 horas estava em O .

4.ª Hipótese. — ($v=-4$, $t=-3$) (fig. 9). — Aqui o enunciado do problema pôde ser :

Onde estava o móvel, 3 horas antes do meio-dia, sabendo que caminhava no sentido negativo?

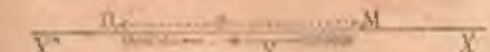


Fig. 9.

Nesta hipótese, teramos :

$$e = (-4) \times (-3) = 12 \text{ km.}$$

Às 9 horas o móvel estava em M, caminhou no sentido negativo, e, às 12 horas, estava em O, depois de percorrer um espaço positivo.

Observação. — Os resultados desse problema são uma verificação gráfica da regra dos sinais, na multiplicação.

§ V. — Divisão dos números algébricos.

22a. Definição. — Dados dois números algébricos, um, chamado *dividendo*, outro, *divisor*, *quociente* desses dois números é um terceiro número que multiplicado pelo divisor, reproduz o dividendo.

$$\begin{aligned} (+18) \div (+3) &= +6, & \text{porque } (+6) \times (+3) &= +18; \\ (+18) \div (-3) &= -6, & \text{porque } (-6) \times (-3) &= +18; \\ (-18) \div (+3) &= -6, & \text{porque } (-6) \times (+3) &= -18; \\ (-18) \div (-3) &= +6, & \text{porque } (+6) \times (-3) &= -18. \end{aligned}$$

23a. Regra. — Para achar o quociente de dois números algébricos, divide-se o valor absoluto do dividendo pelo valor absoluto do divisor, dando ao resultado o sinal + se ambos tiverem o mesmo sinal, e o sinal —, se tiverem sinais contrários.

24a. Observação. — As propriedades dos números aritméticos relativas à divisão, aplicam-se também aos números algébricos.

Das principais :

1.º Para dividir uma soma algébrica por um número, basta dividir cada parcela e juntar os resultados.

Seja a soma algébrica :

$$(-24) + (-15) + (-9) + (+12)$$

a dividir por (-3) ; teremos, dividindo cada parcela,

$$\left. \begin{aligned} (-24) \div (-3) &= +8 \\ (+15) \div (-3) &= -5 \\ (-9) \div (-3) &= +3 \\ (+12) \div (-3) &= -4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{ou somando} \\ &+8 - 5 + 3 - 4 = +2. \end{aligned}$$

Resultado idêntico ao que se obtém efetuando a soma e dividindo o total por (-3) .

Com efeito :

$$(-34) \div (+15) + (-9) \div (+12) = (+27) + (-33) = -6,$$

e

$$(-6) \div (-3) = +2.$$

2.º O quociente de duas potências de mesmo número algébrico e outra potência desse número com expoente igual à diferença dos expoentes no dividendo e no divisor.

Exemplo : dividir $(-2)^6$ por $(-2)^2$;
temos : $(-2)^6 \div (-2)^2 = (-2)^{6-2} = (-2)^4 = +8.$

Resultado idêntico ao que se obtém efetuando as operações indicadas no dividendo e no divisor, e procurando o quociente dos resultados.

$$\begin{aligned} \text{Com efeito : } (-2)^6 &= -32 ; (-2)^2 = +4 ; \\ (-2)^6 \div (-2)^2 &= (-32) \div (+4) = -8. \end{aligned}$$

25a. — Aplicação.

Problema de movimento. — *E' móvel-dita. Um móvel está em O, move-se sobre X'X e percorre um espaço $a = -28$ km, em um tempo $t = 4$ horas. Qual é a velocidade v do movimento ?*

Dando a e e t os valores aritméticos, teremos imediatamente :

$$v = \frac{e}{t} = \frac{28}{4} = 7 \text{ km.}$$

Considerando essas mesmas grandezas como números algébricos, de sinal variável, poderemos fazer as mesmas considerações do número 24a e teremos :

1.ª Hipótese. — ($e = +28, t = +4$) (fig. 10). — E' a solução aritmética ; o valor de v é positivo e temos :

$$v = \frac{e}{t} = \frac{+28}{+4} = +7 \text{ km.}$$

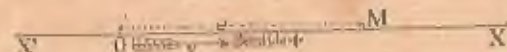


FIG. 10.

2.ª Hipótese. — ($e = -28, t = +4$) (fig. 11). — Como o espaço percorrido é negativo, o móvel anda da direita para a esquerda e a velocidade é negativa. Com efeito :

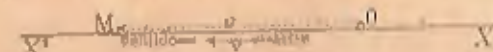


FIG. 11.

$$v = \frac{e}{t} = \frac{-28}{+4} = -7 \text{ km.}$$

3.ª Hipótese. — ($e = +28, t = -4$) (fig. 12). — Neste caso, o problema pôde ser enunciado do modo seguinte : Com que

velocidade caminhou um móvel que levou 4 horas para chegar ao meio-dia, na ponto O, depois de percorrer o espaço $v = 28 \text{ km}$?



Fig. 12.

A velocidade é negativa e o móvel caminhou da direita para a esquerda.

$$v = \frac{-28}{4} = -7 \text{ km.}$$

4.ª Hipótese. — $t = -28$, $v = -4$ (fig. 13). — Nesse caso, o problema deve enunciar-se: Com que velocidade caminhou um móvel que levou 4 horas para chegar ao meio-dia, na ponto O, depois de ter percorrido o espaço negativo $v = -28 \text{ km}$?

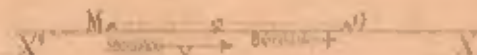


Fig. 13.

A velocidade é positiva e o móvel andou da esquerda para a direita. Com efeito:

$$v = \frac{-28}{-4} = +7 \text{ km.}$$

§ VI — Frações algébricas.

2.ª. Propriedades. — As frações algébricas têm as mesmas propriedades que as frações aritméticas.

Das as principais:

1.ª Multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fração algébrica por um número diferente de zero, a fração não muda de valor.

a) Seja a fração algébrica $\frac{(-3)}{(+4)}$.

Multiplicamos os dois termos por (-5) , teremos:

$$\frac{(-3)}{(+4)} = \frac{(-3) \times (-5)}{(+4) \times (-5)} = \frac{+15}{-20}$$

Com efeito, podemos representar o valor da fração por q , e teremos:

$$\frac{(-3)}{(+4)} = q \quad (1)$$

ou $\{-3\} = (+4) \cdot q$ (2)

Multiplicamos ambos os membros de (2) por (-5) , teremos:

$$\{-3\} \times (-5) = q \times (+4) \times (-5); \quad (3)$$

dividindo os dois membros de (3) por $(+4) \times (-5)$, teremos:

$$\frac{(-3) \times (-5)}{(+4) \times (-5)} = q. \quad (4)$$

Mas em (1) e (4), os segundos membros são iguais; logo os primeiros membros são também iguais; e

$$\frac{(-3)}{(+4)} = \frac{(-3) \times (-5)}{(+4) \times (-5)} = \frac{+15}{-20}.$$

Essa propriedade serve para reduzir frações algébricas ao mesmo denominador.

b) Demonstração análoga permite provar que se podem dividir ambos os termos de uma fração por um mesmo número, sem lhe mudar o valor.

Esta propriedade permite simplificar frações algébricas.

2.ª Para somar ou subtrair várias frações algébricas, é preciso reduzi-las ao mesmo denominador; depois somar ou subtrair os numeradores e dar ao resultado o denominador comum.

Seja somar as frações: $\frac{(-3)}{(+4)}, \frac{(+5)}{(-2)}, \frac{(+7)}{(-6)}$.

O denominador comum é $(+12)$. Para obtê-lo multiplicamos os denominadores das frações dadas respectivamente por $(+3)$, (-6) , (-2) ; multiplicamos os numeradores pelos

mesmos números; as frações são: $\frac{(-9)}{(+12)}, \frac{(-30)}{(+12)}, \frac{(-14)}{(+12)}$.

A soma será:

$$\frac{(-9)}{12} + \frac{(-30)}{12} + \frac{(-14)}{12} = \frac{(-9) + (-30) + (-14)}{12} = \frac{-53}{12}.$$

3.ª O produto de duas ou mais frações algébricas iguala-se ao produto dos numeradores dividido pelo produto dos denominadores.

Sejam as frações: $\frac{(-3)}{(+4)}, \frac{(+5)}{(-2)}, \frac{(+7)}{6}$.

O produto será

$$\frac{(-3)}{(+4)} \times \frac{(+5)}{(-2)} \times \frac{(+7)}{(-6)} = \frac{-3 \times +5 \times +7}{+4 \times -2 \times -6} = \frac{105}{48}$$

por 3 e 40 mil.

	35
48	10

fração dividendo pela fração divisor invertida

Achar o quociente de $\frac{5}{-7}$ por $\{+7\}$

20
21

31 Dec 1965

Օրեգա՝ ընդհանուր օրվա ընթացքի միջոցառումներ

$$\begin{array}{r}
 10a_1 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_2 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_3 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_4 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_5 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_6 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_7 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_8 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_9 = -18z + 7y - 12x - 43 \\
 10a_{10} = -18z + 7y - 12x - 43
 \end{array}$$

11a. Qual é o valor da expressão $a + b +$

1 st	$\frac{1}{2} \rightarrow + 88_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2 nd	$\frac{1}{2} \rightarrow + 24_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3 rd	$\frac{1}{2} \rightarrow + 76_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
4 th	$\frac{1}{2} \rightarrow + 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

12a. Q_{total} is a vector in the expression $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ where

[illegible]

[illegible]

13a	10	—	13b	10	—	13c	10	—
14a	10	—	14b	10	—	14c	10	—
15a	10	—	15b	10	—	15c	10	—
16a	10	—	16b	10	—	16c	10	—
17a	10	—	17b	10	—	17c	10	—
18a	10	—	18b	10	—	18c	10	—
19a	10	—	19b	10	—	19c	10	—
20a	10	—	20b	10	—	20c	10	—
21a	10	—	21b	10	—	21c	10	—
22a	10	—	22b	10	—	22c	10	—
23a	10	—	23b	10	—	23c	10	—
24a	10	—	24b	10	—	24c	10	—
25a	10	—	25b	10	—	25c	10	—
26a	10	—	26b	10	—	26c	10	—
27a	10	—	27b	10	—	27c	10	—
28a	10	—	28b	10	—	28c	10	—
29a	10	—	29b	10	—	29c	10	—
30a	10	—	30b	10	—	30c	10	—
31a	10	—	31b	10	—	31c	10	—
32a	10	—	32b	10	—	32c	10	—
33a	10	—	33b	10	—	33c	10	—
34a	10	—	34b	10	—	34c	10	—
35a	10	—	35b	10	—	35c	10	—
36a	10	—	36b	10	—	36c	10	—
37a	10	—	37b	10	—	37c	10	—
38a	10	—	38b	10	—	38c	10	—
39a	10	—	39b	10	—	39c	10	—
40a	10	—	40b	10	—	40c	10	—
41a	10	—	41b	10	—	41c	10	—
42a	10	—	42b	10	—	42c	10	—
43a	10	—	43b	10	—	43c	10	—
44a	10	—	44b	10	—	44c	10	—
45a	10	—	45b	10	—	45c	10	—
46a	10	—	46b	10	—	46c	10	—
47a	10	—	47b	10	—	47c	10	—
48a	10	—	48b	10	—	48c	10	—
49a	10	—	49b	10	—	49c	10	—
50a	10	—	50b	10	—	50c	10	—
51a	10	—	51b	10	—	51c	10	—
52a	10	—	52b	10	—	52c	10	—
53a	10	—	53b	10	—	53c	10	—
54a	10	—	54b	10	—	54c	10	—
55a	10	—	55b	10	—	55c	10	—
56a	10	—	56b	10	—	56c	10	—
57a	10	—	57b	10	—	57c	10	—
58a	10	—	58b	10	—	58c	10	—
59a	10	—	59b	10	—	59c	10	—
60a	10	—	60b	10	—	60c	10	—
61a	10	—	61b	10	—	61c	10	—
62a	10	—	62b	10	—	62c	10	—
63a	10	—	63b	10	—	63c	10	—
64a	10	—	64b	10	—	64c		

23a Qual é o valor da expressão $B + 3 + n$ para:

$$\begin{aligned} \delta &= \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100} \} \end{aligned}$$

24 d u v z p r m : s t l f i b o e c e g h y q z

25o. Calcular a expressão $b + c - a$ para os valores de N° 23.

26a Qual é o valor de expressão $p \rightarrow q + q \rightarrow p$, para

[illegible]

27a. Calculat a expresia $a + b - c$ unde a este valoarea lui N și b este valoarea lui $N + 1$ și c este valoarea lui $N + 2$.

20c. Circular e appresso il disegno | sopra un cartoncino № 28

11月5日，在江蘇省江浦縣，蘇聯專家與中國工程師在現場進行技術交流。

29	- 5	(-15)	34d	- 9	(12)
30			35	"	
31			36	"	
32			37		
33a	(-5)	(-10)	38a	(-12)	(-21)
		(-3)			(-10)

39a Qual é o valor da expressão $a + b \cdot x$, para:

1º $a = +3,$	$b = -2,$	$x = +2?$
2º $a = -5,$	$b = +3,$	$x = -3?$
3º $a = +2,$	$b = 1,$	$x = 0?$

40a. Calcular a expressão $a + p) \times b$, para os valores de N° 39a.

41a. Mesmo cálculo para $b = 0,8$ e $a = 0,2$

Realizar os cálculos indicados

$42\alpha. (-1, 5, -2, +5, -3, +0,$
 $42\beta. 1, +3, -6, (-1, 7, -5,$
 $44\alpha. 1, +5, -2, +0, -1) + 1$
 $44\beta. (-1, 0, +2, +5, -1, -5, +2, +7, -10),$
 $46\alpha. (+2, -2, +9, -1, -1, 2) + (-5, -4, +8, +5, -2),$

$$P_{\alpha\beta\gamma}, \quad J^{\alpha} = 2, \quad b = 4, \quad \alpha =$$

$$\begin{aligned} \text{2.} \quad a &= +5, b = -3 & a &= -2, b = +4 \\ \text{3.} \quad a &= -4, b = -5 & a &= +3, b = -2 \end{aligned}$$

உள்ளுயர்வு

17a. $\neg(a + b) \wedge (a + b)$	51a. $\neg(a + b + c + d) \wedge (a + c)$
48a. $\neg(a + b + c + d) \wedge (a + b + c + d)$	52. $\neg(a + b + c + d) \wedge (a + b + c + d)$
49a. $(a + b + c + d) \wedge (a + b + c + d)$	53a. $(a + b + c + d) \wedge (a + b + c + d)$
50a. $(a + b + c + d) \wedge (a + b + c + d)$	54a. $(a + b + c + d) \wedge (a + b + c + d)$

Deviante or nonconformant behavior.

55	-50)	-(-15)	60a,	(-150)	(-25
56,	-50)	-(-15)	61,	(-150)	(-25
57a,	-15,	-(-3)	62a,	(-252)	(-25
58a	(-16)	-(-6,	63a,	(-467)	(-25
59a,	(-178)	-(-22	64a,	(-2675)	(-25

For year of operations indicated:

86a. $\{12+27+36+54+80\} \div \{-3\}$
 86a. $\{25-40-85-205-10\} \div \{-5\}$
 87a. $\{-85-162-49-72-210\} \div \{-2\}$

Problemas sobre os números algébricos.

115a A distância de Rio de Janeiro a São Paulo é de 598 km. De São Paulo a Barra do Piraí há 190 km. De Barra do Piraí a Teresopolis há 100 km. Qual a distância de Rio de Janeiro a Teresopolis?

116a Duas pessoas foram para o mesmo lugar. Uma delas foi de carro e a outra a pé. O carro foi mais rápido e chegou primeiro. Quanto tempo levou o carro para chegar ao destino?

117a Um vendedor de produtos alimentícios vendeu 10 kg de arroz a 1,20\$ por kg e 5 kg de feijão a 0,80\$ por kg. Quanto recebeu pelo total?

118a Um comerciante comprou 100 kg de açúcar a 1,50\$ por kg e vendeu 80 kg a 2,00\$ por kg. Qual o lucro dele?

119a Um carro percorre 100 km em 2 horas. Quanto tempo levará para percorrer 200 km?

120a Dois carros saíram de uma cidade para outra. Um deles saiu às 8h e o outro às 9h. O primeiro chegou primeiro. Quanto tempo levou o primeiro carro para chegar ao destino?

121a Um negociante comprou 100 kg de arroz a 1,20\$ por kg e vendeu 80 kg a 1,50\$ por kg. Qual o lucro dele?

122a Um negociante é conhecido por comprar e vender produtos. Ele comprou 100 kg de arroz a 1,20\$ por kg e vendeu 80 kg a 1,50\$ por kg. Qual o lucro dele?

123a Num jogo de cartas, um jogador ganhou 25\$ e o outro perdeu 10\$. Quanto dinheiro ficou no jogo?

124a Quantos são 12 h de trabalho em 1 dia? São 11 h 50 min. Quantos são 12 h de trabalho em 2 dias? São 23 h 50 min. Quantos são 12 h de trabalho em 3 dias? São 35 h 50 min.

125a O dia 1º de janeiro de 1925 do calendário juliano corresponde a qual dia de janeiro do calendário gregoriano? Quais são as datas julianas correspondentes a 18 de fevereiro, 25 de março e 2 de maio e 5 de agosto do calendário gregoriano?

68a	$1 + 2 + \dots + 100$	101	102	103	104
69a	$1 + 2 + \dots + 100$	101	102	103	104
70					
71					
72					
73					
74					
75					
76					
77					
78					
79					
80					
81					
82					
83					
84					
85					
86					
87					
88					
89					
90					
91					
92					
93					
94					
95					
96					
97					
98					
99					
100					

Se a soma de dois números é 100 e a diferença é 20, qual o maior número?

97a	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
-----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Se a soma de dois números é 100 e a diferença é 20, qual o maior número?

101a	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Se a soma de dois números é 100 e a diferença é 20, qual o maior número?

109a	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

128a. Na linha A X, um móvel a 100 km/h percorreu o espaço de 100 km, qual é sua velocidade?

129a. Um móvel saiu a partir do ponto O sobre a linha A X, a 100 km/h, percorreu o espaço de 100 km, qual é sua velocidade?

CAPÍTULO III

1. Adição e subtração

1. Emprego de letras.

1. **Uso da algebrá** — Algebrá é a ciência que resolve e generaliza os problemas sobre os números.

É uma aritmética universal segundo Newton — é uma aritmética generalizada.

Para isso a algebrá representa os números pelas letras do alfabeto:

$$a, b, c, d, \dots, x, y, z, u, v.$$

Se vários números são representados pela mesma letra, marca-se esta letra por sinais particulares chamados *índices*. Assim as expressões

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$$

expressam números distintos. As primeiras lêem-se:

a linha, a duas linhas, a três linhas, a quatro linhas, ..., e as seguintes,

a índice um, a índice dois, a índice três,...

II. Sinais algébricos

2. **Adição e subtração** — Os sinais da adição e da subtração são os mesmos que na aritmética. Assim $a + b$ representa a soma dos números a e b e $a - b$, sua diferença.

Os números precedidos do sinal — são negativos ou subtraídos e os outros são positivos ou aditivos.

Multiplicação — O produto de dois números a e b escreve-se ab, ou $a \times b$, ou $a \cdot b$.

A expressão $abcd$ é pois lida, lida às seguintes:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \text{ ou } a \times b \times c \times d.$$

3. **Divisão** — A divisão de a por b escreve-se

$$\frac{a}{b} \text{ ou}$$

Estas expressões lêem-se respectivamente: a sobre b e a dividido por b .

5. **Desigualdade** — Os sinais da desigualdade são $>$, $<$, \geq , \leq .
Lêem-se: maior do que e menor do que.

Para indicar que dois números a e b são desiguais, escreve-se:

$$a > b \text{ ou } a < b.$$

conforme a for o maior ou o menor dos dois números.

6. **Igualdade** — O sinal da igualdade é $=$, que se pronuncia igual. Põe-se entre duas quantidades do mesmo valor a expressão

$$a = b$$

é uma igualdade.

Numa igualdade, tudo quanto fica antes do sinal $=$ é o primeiro membro, e tudo quanto fica depois deste sinal é o segundo membro.

7. **Radical** — Para indicar a extração de raiz de um número, cobre-se este número com o sinal $\sqrt{\quad}$ chamada *radical*. No ângulo deste sinal, põe-se um número indicando *na raiz* que indica que espécie de raiz se deve extrair. Assim as expressões

$$\sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \dots$$

representam respectivamente a raiz cúbica de a , a raiz quinta de a e a raiz duodécima de a . A raiz quadrada de um número a representa-se sem índice por \sqrt{a} .

8. **Coefficiente** — Coefficiente é um número posto á esquerda de uma quantidade; indica quantas vezes se a quantidade se toma como parcela.

Quando a designação lêem-se

$$5a = a + a + a + a + a$$

Exponente — É a potência a que cada letra está elevada a direita e a esquerda de x . Assim, em $x^2 + 3x + 5$, o expoente de x é 2, 1 e 0, respectivamente. Assim, as expressões são polinômios.

Do mesmo modo, podemos dizer que:

$$5a^2b^2 + 3b^2 + a + b^2 + a^2$$

As expressões a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , a^6 formam, respectivamente, a 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª e 6ª potências de a .

III. Expressões algébricas

0. Expressão algébrica. — Expressão algébrica é a que não contém operações aritméticas nem radicais. Assim, as expressões

$$a + b, 3a^2b,$$

são expressões algébricas.

1. Termo. — Termo é toda expressão algébrica que não é dividida por uma das letras a ou b . Assim, as expressões

$$a + b, 3a^2b^2, 5a^3b^2, 7a^4b^3, 8a^5b^4, 9a^6b^5, 10a^7b^6, 11a^8b^7, 12a^9b^8, 13a^{10}b^9, 14a^{11}b^{10}, 15a^{12}b^{11}, 16a^{13}b^{12}, 17a^{14}b^{13}, 18a^{15}b^{14}, 19a^{16}b^{15}, 20a^{17}b^{16}, 21a^{18}b^{17}, 22a^{19}b^{18}, 23a^{20}b^{19}, 24a^{21}b^{20}, 25a^{22}b^{21}, 26a^{23}b^{22}, 27a^{24}b^{23}, 28a^{25}b^{24}, 29a^{26}b^{25}, 30a^{27}b^{26}, 31a^{28}b^{27}, 32a^{29}b^{28}, 33a^{30}b^{29}, 34a^{31}b^{30}, 35a^{32}b^{31}, 36a^{33}b^{32}, 37a^{34}b^{33}, 38a^{35}b^{34}, 39a^{36}b^{35}, 40a^{37}b^{36}, 41a^{38}b^{37}, 42a^{39}b^{38}, 43a^{40}b^{39}, 44a^{41}b^{40}, 45a^{42}b^{41}, 46a^{43}b^{42}, 47a^{44}b^{43}, 48a^{45}b^{44}, 49a^{46}b^{45}, 50a^{47}b^{46}, 51a^{48}b^{47}, 52a^{49}b^{48}, 53a^{50}b^{49}, 54a^{51}b^{50}, 55a^{52}b^{51}, 56a^{53}b^{52}, 57a^{54}b^{53}, 58a^{55}b^{54}, 59a^{56}b^{55}, 60a^{57}b^{56}, 61a^{58}b^{57}, 62a^{59}b^{58}, 63a^{60}b^{59}, 64a^{61}b^{60}, 65a^{62}b^{61}, 66a^{63}b^{62}, 67a^{64}b^{63}, 68a^{65}b^{64}, 69a^{66}b^{65}, 70a^{67}b^{66}, 71a^{68}b^{67}, 72a^{69}b^{68}, 73a^{70}b^{69}, 74a^{71}b^{70}, 75a^{72}b^{71}, 76a^{73}b^{72}, 77a^{74}b^{73}, 78a^{75}b^{74}, 79a^{76}b^{75}, 80a^{77}b^{76}, 81a^{78}b^{77}, 82a^{79}b^{78}, 83a^{80}b^{79}, 84a^{81}b^{80}, 85a^{82}b^{81}, 86a^{83}b^{82}, 87a^{84}b^{83}, 88a^{85}b^{84}, 89a^{86}b^{85}, 90a^{87}b^{86}, 91a^{88}b^{87}, 92a^{89}b^{88}, 93a^{90}b^{89}, 94a^{91}b^{90}, 95a^{92}b^{91}, 96a^{93}b^{92}, 97a^{94}b^{93}, 98a^{95}b^{94}, 99a^{96}b^{95}, 100a^{97}b^{96}, 101a^{98}b^{97}, 102a^{99}b^{98}, 103a^{100}b^{99}, 104a^{101}b^{100}, 105a^{102}b^{101}, 106a^{103}b^{102}, 107a^{104}b^{103}, 108a^{105}b^{104}, 109a^{106}b^{105}, 110a^{107}b^{106}, 111a^{108}b^{107}, 112a^{109}b^{108}, 113a^{110}b^{109}, 114a^{111}b^{110}, 115a^{112}b^{111}, 116a^{113}b^{112}, 117a^{114}b^{113}, 118a^{115}b^{114}, 119a^{116}b^{115}, 120a^{117}b^{116}, 121a^{118}b^{117}, 122a^{119}b^{118}, 123a^{120}b^{119}, 124a^{121}b^{120}, 125a^{122}b^{121}, 126a^{123}b^{122}, 127a^{124}b^{123}, 128a^{125}b^{124}, 129a^{126}b^{125}, 130a^{127}b^{126}, 131a^{128}b^{127}, 132a^{129}b^{128}, 133a^{130}b^{129}, 134a^{131}b^{130}, 135a^{132}b^{131}, 136a^{133}b^{132}, 137a^{134}b^{133}, 138a^{135}b^{134}, 139a^{136}b^{135}, 140a^{137}b^{136}, 141a^{138}b^{137}, 142a^{139}b^{138}, 143a^{140}b^{139}, 144a^{141}b^{140}, 145a^{142}b^{141}, 146a^{143}b^{142}, 147a^{144}b^{143}, 148a^{145}b^{144}, 149a^{146}b^{145}, 150a^{147}b^{146}, 151a^{148}b^{147}, 152a^{149}b^{148}, 153a^{150}b^{149}, 154a^{151}b^{150}, 155a^{152}b^{151}, 156a^{153}b^{152}, 157a^{154}b^{153}, 158a^{155}b^{154}, 159a^{156}b^{155}, 160a^{157}b^{156}, 161a^{158}b^{157}, 162a^{159}b^{158}, 163a^{160}b^{159}, 164a^{161}b^{160}, 165a^{162}b^{161}, 166a^{163}b^{162}, 167a^{164}b^{163}, 168a^{165}b^{164}, 169a^{166}b^{165}, 170a^{167}b^{166}, 171a^{168}b^{167}, 172a^{169}b^{168}, 173a^{170}b^{169}, 174a^{171}b^{170}, 175a^{172}b^{171}, 176a^{173}b^{172}, 177a^{174}b^{173}, 178a^{175}b^{174}, 179a^{176}b^{175}, 180a^{177}b^{176}, 181a^{178}b^{177}, 182a^{179}b^{178}, 183a^{180}b^{179}, 184a^{181}b^{180}, 185a^{182}b^{181}, 186a^{183}b^{182}, 187a^{184}b^{183}, 188a^{185}b^{184}, 189a^{186}b^{185}, 190a^{187}b^{186}, 191a^{188}b^{187}, 192a^{189}b^{188}, 193a^{190}b^{189}, 194a^{191}b^{190}, 195a^{192}b^{191}, 196a^{193}b^{192}, 197a^{194}b^{193}, 198a^{195}b^{194}, 199a^{196}b^{195}, 200a^{197}b^{196}, 201a^{198}b^{197}, 202a^{199}b^{198}, 203a^{200}b^{199}, 204a^{201}b^{200}, 205a^{202}b^{201}, 206a^{203}b^{202}, 207a^{204}b^{203}, 208a^{205}b^{204}, 209a^{206}b^{205}, 210a^{207}b^{206}, 211a^{208}b^{207}, 212a^{209}b^{208}, 213a^{210}b^{209}, 214a^{211}b^{210}, 215a^{212}b^{211}, 216a^{213}b^{212}, 217a^{214}b^{213}, 218a^{215}b^{214}, 219a^{216}b^{215}, 220a^{217}b^{216}, 221a^{218}b^{217}, 222a^{219}b^{218}, 223a^{220}b^{219}, 224a^{221}b^{220}, 225a^{222}b^{221}, 226a^{223}b^{222}, 227a^{224}b^{223}, 228a^{225}b^{224}, 229a^{226}b^{225}, 230a^{227}b^{226}, 231a^{228}b^{227}, 232a^{229}b^{228}, 233a^{230}b^{229}, 234a^{231}b^{230}, 235a^{232}b^{231}, 236a^{233}b^{232}, 237a^{234}b^{233}, 238a^{235}b^{234}, 239a^{236}b^{235}, 240a^{237}b^{236}, 241a^{238}b^{237}, 242a^{239}b^{238}, 243a^{240}b^{239}, 244a^{241}b^{240}, 245a^{242}b^{241}, 246a^{243}b^{242}, 247a^{244}b^{243}, 248a^{245}b^{244}, 249a^{246}b^{245}, 250a^{247}b^{246}, 251a^{248}b^{247}, 252a^{249}b^{248}, 253a^{250}b^{249}, 254a^{251}b^{250}, 255a^{252}b^{251}, 256a^{253}b^{252}, 257a^{254}b^{253}, 258a^{255}b^{254}, 259a^{256}b^{255}, 260a^{257}b^{256}, 261a^{258}b^{257}, 262a^{259}b^{258}, 263a^{260}b^{259}, 264a^{261}b^{260}, 265a^{262}b^{261}, 266a^{263}b^{262}, 267a^{264}b^{263}, 268a^{265}b^{264}, 269a^{266}b^{265}, 270a^{267}b^{266}, 271a^{268}b^{267}, 272a^{269}b^{268}, 273a^{270}b^{269}, 274a^{271}b^{270}, 275a^{272}b^{271}, 276a^{273}b^{272}, 277a^{274}b^{273}, 278a^{275}b^{274}, 279a^{276}b^{275}, 280a^{277}b^{276}, 281a^{278}b^{277}, 282a^{279}b^{278}, 283a^{280}b^{279}, 284a^{281}b^{280}, 285a^{282}b^{281}, 286a^{283}b^{282}, 287a^{284}b^{283}, 288a^{285}b^{284}, 289a^{286}b^{285}, 290a^{287}b^{286}, 291a^{288}b^{287}, 292a^{289}b^{288}, 293a^{290}b^{289}, 294a^{291}b^{290}, 295a^{292}b^{291}, 296a^{293}b^{292}, 297a^{294}b^{293}, 298a^{295}b^{294}, 299a^{296}b^{295}, 300a^{297}b^{296}, 301a^{298}b^{297}, 302a^{299}b^{298}, 303a^{300}b^{299}, 304a^{301}b^{300}, 305a^{302}b^{301}, 306a^{303}b^{302}, 307a^{304}b^{303}, 308a^{305}b^{304}, 309a^{306}b^{305}, 310a^{307}b^{306}, 311a^{308}b^{307}, 312a^{309}b^{308}, 313a^{310}b^{309}, 314a^{311}b^{310}, 315a^{312}b^{311}, 316a^{313}b^{312}, 317a^{314}b^{313}, 318a^{315}b^{314}, 319a^{316}b^{315}, 320a^{317}b^{316}, 321a^{318}b^{317}, 322a^{319}b^{318}, 323a^{320}b^{319}, 324a^{321}b^{320}, 325a^{322}b^{321}, 326a^{323}b^{322}, 327a^{324}b^{323}, 328a^{325}b^{324}, 329a^{326}b^{325}, 330a^{327}b^{326}, 331a^{328}b^{327}, 332a^{329}b^{328}, 333a^{330}b^{329}, 334a^{331}b^{330}, 335a^{332}b^{331}, 336a^{333}b^{332}, 337a^{334}b^{333}, 338a^{335}b^{334}, 339a^{336}b^{335}, 340a^{337}b^{336}, 341a^{338}b^{337}, 342a^{339}b^{338}, 343a^{340}b^{339}, 344a^{341}b^{340}, 345a^{342}b^{341}, 346a^{343}b^{342}, 347a^{344}b^{343}, 348a^{345}b^{344}, 349a^{346}b^{345}, 350a^{347}b^{346}, 351a^{348}b^{347}, 352a^{349}b^{348}, 353a^{350}b^{349}, 354a^{351}b^{350}, 355a^{352}b^{351}, 356a^{353}b^{352}, 357a^{354}b^{353}, 358a^{355}b^{354}, 359a^{356}b^{355}, 360a^{357}b^{356}, 361a^{358}b^{357}, 362a^{359}b^{358}, 363a^{360}b^{359}, 364a^{361}b^{360}, 365a^{362}b^{361}, 366a^{363}b^{362}, 367a^{364}b^{363}, 368a^{365}b^{364}, 369a^{366}b^{365}, 370a^{367}b^{366}, 371a^{368}b^{367}, 372a^{369}b^{368}, 373a^{370}b^{369}, 374a^{371}b^{370}, 375a^{372}b^{371}, 376a^{373}b^{372}, 377a^{374}b^{373}, 378a^{375}b^{374}, 379a^{376}b^{375}, 380a^{377}b^{376}, 381a^{378}b^{377}, 382a^{379}b^{378}, 383a^{380}b^{379}, 384a^{381}b^{380}, 385a^{382}b^{381}, 386a^{383}b^{382}, 387a^{384}b^{383}, 388a^{385}b^{384}, 389a^{386}b^{385}, 390a^{387}b^{386}, 391a^{388}b^{387}, 392a^{389}b^{388}, 393a^{390}b^{389}, 394a^{391}b^{390}, 395a^{392}b^{391}, 396a^{393}b^{392}, 397a^{394}b^{393}, 398a^{395}b^{394}, 399a^{396}b^{395}, 400a^{397}b^{396}, 401a^{398}b^{397}, 402a^{399}b^{398}, 403a^{400}b^{399}, 404a^{401}b^{400}, 405a^{402}b^{401}, 406a^{403}b^{402}, 407a^{404}b^{403}, 408a^{405}b^{404}, 409a^{406}b^{405}, 410a^{407}b^{406}, 411a^{408}b^{407}, 412a^{409}b^{408}, 413a^{410}b^{409}, 414a^{411}b^{410}, 415a^{412}b^{411}, 416a^{413}b^{412}, 417a^{414}b^{413}, 418a^{415}b^{414}, 419a^{416}b^{415}, 420a^{417}b^{416}, 421a^{418}b^{417}, 422a^{419}b^{418}, 423a^{420}b^{419}, 424a^{421}b^{420}, 425a^{422}b^{421}, 426a^{423}b^{422}, 427a^{424}b^{423}, 428a^{425}b^{424}, 429a^{426}b^{425}, 430a^{427}b^{426}, 431a^{428}b^{427}, 432a^{429}b^{428}, 433a^{430}b^{429}, 434a^{431}b^{430}, 435a^{432}b^{431}, 436a^{433}b^{432}, 437a^{434}b^{433}, 438a^{435}b^{434}, 439a^{436}b^{435}, 440a^{437}b^{436}, 441a^{438}b^{437}, 442a^{439}b^{438}, 443a^{440}b^{439}, 444a^{441}b^{440}, 445a^{442}b^{441}, 446a^{443}b^{442}, 447a^{444}b^{443}, 448a^{445}b^{444}, 449a^{446}b^{445}, 450a^{447}b^{446}, 451a^{448}b^{447}, 452a^{449}b^{448}, 453a^{450}b^{449}, 454a^{451}b^{450}, 455a^{452}b^{451}, 456a^{453}b^{452}, 457a^{454}b^{453}, 458a^{455}b^{454}, 459a^{456}b^{455}, 460a^{457}b^{456}, 461a^{458}b^{457}, 462a^{459}b^{458}, 463a^{460}b^{459}, 464a^{461}b^{460}, 465a^{462}b^{461}, 466a^{463}b^{462}, 467a^{464}b^{463}, 468a^{465}b^{464}, 469a^{466}b^{465}, 470a^{467}b^{466}, 471a^{468}b^{467}, 472a^{469}b^{468}, 473a^{470}b^{469}, 474a^{471}b^{470}, 475a^{472}b^{471}, 476a^{473}b^{472}, 477a^{474}b^{473}, 478a^{475}b^{474}, 479a^{476}b^{475}, 480a^{477}b^{476}, 481a^{478}b^{477}, 482a^{479}b^{478}, 483a^{480}b^{479}, 484a^{481}b^{480}, 485a^{482}b^{481}, 486a^{483}b^{482}, 487a^{484}b^{483}, 488a^{485}b^{484}, 489a^{486}b^{485}, 490a^{487}b^{486}, 491a^{488}b^{487}, 492a^{489}b^{488}, 493a^{490}b^{489}, 494a^{491}b^{490}, 495a^{492}b^{491}, 496a^{493}b^{492}, 497a^{494}b^{493}, 498a^{495}b^{494}, 499a^{496}b^{495}, 500a^{497}b^{496}, 501a^{498}b^{497}, 502a^{499}b^{498}, 503a^{500}b^{499}, 504a^{501}b^{500}, 505a^{502}b^{501}, 506a^{503}b^{502}, 507a^{504}b^{503}, 508a^{505}b^{504}, 509a^{506}b^{505}, 510a^{507}b^{506}, 511a^{508}b^{507}, 512a^{509}b^{508}, 513a^{510}b^{509}, 514a^{511}b^{510}, 515a^{512}b^{511}, 516a^{513}b^{512}, 517a^{514}b^{513}, 518a^{515}b^{514}, 519a^{516}b^{515}, 520a^{517}b^{516}, 521a^{518}b^{517}, 522a^{519}b^{518}, 523a^{520}b^{519}, 524a^{521}b^{520}, 525a^{522}b^{521}, 526a^{523}b^{522}, 527a^{524}b^{523}, 528a^{525}b^{524}, 529a^{526}b^{525}, 530a^{527}b^{526}, 531a^{528}b^{527}, 532a^{529}b^{528}, 533a^{530}b^{529}, 534a^{531}b^{530}, 535a^{532}b^{531}, 536a^{533}b^{532}, 537a^{534}b^{533}, 538a^{535}b^{534}, 539a^{536}b^{535}, 540a^{537}b^{536}, 541a^{538}b^{537}, 542a^{539}b^{538}, 543a^{540}b^{539}, 544a^{541}b^{540}, 545a^{542}b^{541}, 546a^{543}b^{542}, 547a^{544}b^{543}, 548a^{545}b^{544}, 549a^{546}b^{545}, 550a^{547}b^{546}, 551a^{548}b^{547}, 552a^{549}b^{548}, 553a^{550}b^{549}, 554a^{551}b^{550}, 555a^{552}b^{551}, 556a^{553}b^{552}, 557a^{554}b^{553}, 558a^{555}b^{554}, 559a^{556}b^{555}, 560a^{557}b^{556}, 561a^{558}b^{557}, 562a^{559}b^{558}, 563a^{560}b^{559}, 564a^{561}b^{560}, 565a^{562}b^{561}, 566a^{563}b^{562}, 567a^{564}b^{563}, 568a^{565}b^{564}, 569a^{566}b^{565}, 570a^{567}b^{566}, 571a^{568}b^{567}, 572a^{569}b^{568}, 573a^{570}b^{569}, 574a^{571}b^{570}, 575a^{572}b^{571}, 576a^{573}b^{572}, 577a^{574}b^{573}, 578a^{575}b^{574}, 579a^{576}b^{575}, 580a^{577}b^{576}, 581a^{578}b^{577}, 582a^{579}b^{578}, 583a^{580}b^{579}, 584a^{581}b^{580}, 585a^{582}b^{581}, 586a^{583}b^{582}, 587a^{584}b^{583}, 588a^{585}b^{584}, 589a^{586}b^{585}, 590a^{587}b^{586}, 591a^{588}b^{587}, 592a^{589}b^{588}, 593a^{590}b^{589}, 594a^{591}b^{590}, 595a^{592}b^{591}, 596a^{593}b^{592}, 597a^{594}b^{593}, 598a^{595}b^{594}, 599a^{596}b^{595}, 600a^{597}b^{596}, 601a^{598}b^{597}, 602a^{599}b^{598}, 603a^{600}b^{599}, 604a^{601}b^{600}, 605a^{602}b^{601}, 606a^{603}b^{602}, 607a^{604}b^{603}, 608a^{605}b^{604}, 609a^{606}b^{605}, 610a^{607}b^{606}, 611a^{608}b^{607}, 612a^{609}b^{608}, 613a^{610}b^{609}, 614a^{611}b^{610}, 615a^{612}b^{611}, 616a^{613}b^{612}, 617a^{614}b^{613}, 618a^{615}b^{614}, 619a^{616}b^{615}, 620a^{617}b^{616}, 621a^{618}b^{617}, 622a^{619}b^{618}, 623a^{620}b^{619}, 624a^{621}b^{620}, 625a^{622}b^{621}, 626a^{623}b^{622}, 627a^{624}b^{623}, 628a^{625}b^{624}, 629a^{626}b^{625}, 630a^{627}b^{626}, 631a^{628}b^{627}, 632a^{629}b^{628}, 633a^{630}b^{629}, 634a^{631}b^{630}, 635a^{632}b^{631}, 636a^{633}b^{632}, 637a^{634}b^{633}, 638a^{635}b^{634}, 639a^{636}b^{635}, 640a^{637}b^{636}, 641a^{638}b^{637}, 642a^{639}b^{638}, 643a^{640}b^{639}, 644a^{641}b^{640}, 645a^{642}b^{641}, 646a^{643}b^{642}, 647a^{644}b^{643}, 648a^{645}b^{644}, 649a^{646}b^{645}, 650a^{647}b^{646}, 651a^{648}b^{647}, 652a^{649}b^{648}, 653a^{650}b^{649}, 654a^{651}b^{650}, 655a^{652}b^{651}, 656a^{653}b^{652}, 657a^{654}b^{653}, 658a^{655}b^{654}, 659a^{656}b^{655}, 660a^{657}b^{656}, 661a^{658}b^{657}, 662a^{659}b^{658}, 663a^{660}b^{659}, 664a^{661}b^{660}, 665a^{662}b^{661}, 666a^{663}b^{662}, 667a^{664}b^{663}, 668a^{665}b^{664}, 669a^{666}b^{665}, 670a^{667}b^{666}, 671a^{668}b^{667}, 672a^{669}b^{668}, 673a^{670}b^{669}, 674a^{671}b^{670}, 675a^{672}b^{671}, 676a^{673}b^{672}, 677a^{674}b^{673}, 678a^{675}b^{674}, 679a^{676}b^{675}, 680a^{677}b^{676}, 681a^{678}b^{677}, 682a^{679}b^{678}, 683a^{680}b^{679}, 684a^{681}b^{680}, 685a^{682}b^{681}, 686a^{683}b^{682}, 687a^{684}b^{683}, 688a^{685}b^{684}, 689a^{686}b^{685}, 690a^{687}b^{686}, 691a^{688}b^{687}, 692a^{689}b^{688}, 693a^{690}b^{689}, 694a^{691}b^{690}, 695a^{692}b^{691}, 696a^{693}b^{692}, 697a^{694}b^{693}, 698a^{695}b^{694}, 699a^{696}b^{695}, 700a^{697}b^{696}, 701a^{698}b^{697}, 702a^{699}b^{698}, 703a^{700}b^{699}, 704a^{701}b^{700}, 705a^{702}b^{701}, 706a^{703}b^{702}, 707a^{704}b^{703}, 708a^{705}b^{704}, 709a^{706}b^{705}, 710a^{707}b^{706}, 711a^{708}b^{707}, 712a^{709}b^{708}, 713a^{710}b^{709}, 714a^{711}b^{710}, 715a^{712}b^{711}, 716a^{713}b^{712}, 717a^{714}b^{713}, 718a^{715}b^{714}, 719a^{716}b^{715}, 720a^{717}b^{716}, 721a^{718}b^{717}, 722a^{719}b^{718}, 723a^{720}b^{719}, 724a^{721}b^{720}, 725a^{722}b^{721}, 726a^{723}b^{722}, 727a^{724}b^{723}, 728a^{725}b^{724}, 729a^{726}b^{725}, 730a^{727}b^{726}, 731a^{728}b^{727}, 732a^{729}b^{728}, 733a^{730}b^{729}, 734a^{731}b^{730}, 735a^{732}b^{731}, 736a^{733}b^{732}, 737a^{734}b^{733}, 738a^{735}b^{734}, 739a^{736}b^{735}, 740a^{737}b^{736}, 741a^{738}b^{737}, 742a^{739}b^{738}, 743a^{740}b^{739}, 744a^{741}b^{740}, 745a^{742}b^{741}, 746a^{743}b^{742}, 747a^{744}b^{743}, 748$$

$$7a^2, -11, 25a^2, \frac{a^2}{5}, a\sqrt{5}.$$

são quatro termos semelhantes.

Reduzir os termos semelhantes.

$$11a^2 - 9a^2 + a^2 + 7a^2 - 5a^2 + 3a^2 + 2a^2 + 4a^2$$

$$= 11a^2 - 9a^2 + a^2 + 7a^2 - 5a^2 + 3a^2 + 2a^2 + 4a^2$$

Assim, o polinômio

$$11a^2 - 9a^2 + a^2 + 7a^2 - 5a^2 + 3a^2 + 2a^2 + 4a^2$$

a^2 deve ser tomado $11 - 9 + 7 - 5 + 2 = 6$ vezes

a^2 deve ser tomado $1 - 3 = 4$ vezes.

a deve ser tomado $4 - 1 = 3$ vezes.

De sorte que o polinômio proposto reduz-se a

$$6a^2 + 4a^2 + 3a = 1.$$

VI. Valor numérico das expressões algébricas.

Definição. — Quando se substitui nos termos de uma expressão algébrica certos valores numéricos para as letras, o valor numérico da expressão é o valor numérico da expressão resultante.

Exemplo. — Se $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, o valor numérico da expressão

$$a^2 - 3a^2x^2y^2 + 3axy^2 - xy^3$$

sabendo que $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.

Substituindo cada letra por seu valor, temos para o valor numérico da expressão:

$$2^2 - 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^3$$

EXERCÍCIOS

Mostrar a diferença que há entre as expressões seguintes:

$$1. 3a + b^2 \quad 2. ma + am^2$$

$$3. 5a + a^2 \quad 4. 2(a+b) \text{ e } (a+b)^2$$

Ordem as expressões seguintes:

$$5. a^2, a^2$$

$$6. a^2b^2, a^2$$

$$7. a^2, a^2$$

$$10. a, 3a^m$$

Definir as expressões seguintes:

$$11. 5a$$

$$12. 3a^2$$

$$13. a^2$$

$$14. 3a^2$$

Achar, em relação a x , o grau de cada uma das expressões seguintes:

$$15. 4x^2$$

$$16. a^2x^2$$

$$17. a^2 + 3a^2x + 3ax^2 + x^2$$

$$18. 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2$$

$$19. 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2$$

$$20. y^2 - 4x^2y + 4y^2$$

Ordenar os termos numericamente em relação a cada letra, os polinômios seguintes:

$$21. 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2$$

$$22. 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2$$

$$23. 3x^2 + 4x^2 - 5x^2 + 2x^2 + 7x^2 + 2x^2$$

Reduzir a expressão aos termos semelhantes:

$$24. 5 - a + 3b - 4a - 2b + 7a + 4b$$

$$25. 4x^2 + 3x^2 - 4x^2 + x^2 - 5x^2 + 2x^2$$

$$26. 4x^2 + 3x^2 - 4x^2 + x^2 - 5x^2 + 2x^2$$

$$27. 47 - 24a + 43 - 52a - 87 - 1a + 1$$

$$28. 4a^2b^2c - 5a^2b^2c - 1a^2b^2c - 7a^2b^2c - 18a^2b^2c - a^2b^2c$$

$$29. 4a^2b^2c - 5a^2b^2c - 1a^2b^2c - 7a^2b^2c - 18a^2b^2c - a^2b^2c$$

$$30. 0a^2 - 3a^2 - 4a^2 + 5a^2 + 4a^2 - 3a^2 - 4a^2 + 5a^2$$

$$31. 2a^2 - 3a^2 - 4a^2 + 5a^2 + 4a^2 - 3a^2 - 4a^2 + 5a^2$$

Achar os valores numéricos das expressões seguintes:

$$1. \text{ Para } a=0, b=1, c=1,$$

$$2. \text{ Para } a=3, b=1, c=2,$$

$$32. a + b^2$$

$$33. a^2 + b^2$$

$$34. a^2 + b^2$$

$$35. a^2 + b^2$$

$$36. a^2 + b^2$$

$$37. a^2 + b^2$$

$$38. a^2 + b^2 + c^2$$

$$39. a^2 + b^2 + c^2$$

$$40. a^2 + b^2 + c^2$$

$$41. a^2 + b^2 + c^2$$

Ordenar as expressões seguintes numericamente em relação a x :

$$42. a^2 + b^2 + c^2$$

$$43. a^2 + b^2 + c^2$$

$$44. a^2 + b^2 + c^2$$

$$45. a^2 + b^2 + c^2$$

$$46. a^2 + b^2 + c^2$$

$$47. a^2 + b^2 + c^2$$

$$48. a^2 + b^2 + c^2$$

$$49. a^2 + b^2 + c^2$$

$$50. a^2 + b^2 + c^2$$

$$51. a^2 + b^2 + c^2$$

Salvador 450

$$a=2, \quad b=0, \quad l=10, \quad \beta=0, \quad R=2, \quad \pi=3.14$$

cellular and non cellular components

地址：廣州省城內

50 $\pi \approx 3.1416$

53. $x \Rightarrow y$ 1-14

$$y = N(\mu, \Sigma)$$

15-4. $\rho = \frac{1}{2} \sqrt{45}$

01 正比例函数、反比例函数

பெ. அ. கிருஷ்ணன்

62. $\frac{1}{2} \log 16$

154. $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

89 7500 1/2 1304

57 22-13 48-11

64 $x = \frac{16 \times 10^3}{9}$

11 71

3 125 12

4. $A_1 \cap T_1 \cap A_2 \cap T_2$

ANGLA E SLETTA 1989

24 Definição. Somar as expressões algébricas A e B é formar uma 3.ª expressão que tenha um valor numérico sempre que A e B tiverem um valor numérico qualquer. As mesmas letras são usadas para as mesmas expressões.

Substitua duas expressões algébricas A e B por formas numéricas e verifique se a igualdade é verdadeira.

No adição e subtração dos algarismos, usamos a seguinte dica:

- 1.^a Aqueous solution of sodium chloride
2.^a Aqueous solution of sodium chloride

Ajuda de produção.

22. Regra. - Para somar vários números é preciso escrevê-los uns depois dos outros, com seus algarismos, e reduzir os termos semelhantes.

சென்னை 15 நவம்பர் 2019

$$\text{Br}_2, \text{I}_2, \text{—Hg, Pb}^{\text{II}}, \text{Hg}^{\text{II}} \text{—} \text{Ag}^{\text{+}}$$

A bomba é evitada por isso.

11. 11. 11. 11.

II Adición de polímeros

Ed. Bern. - L'opus sumit varios polinomios et preloso estra-
todes bene terminos una repouit an an res, inde non an an

Seja o polinômio $a-b$, ao qual se deve acrescentar outro
linômio $c-d$.

de poliro a—b reser bade e, autescanfa se d'n ,
ma d—b e tave plus ser din : ina te d, e va n a ser

Se o resultado foge, limpa a regra precedente.

На 7-м и 10-м этаже. По адресу: Ярославль, ул. Кирова, д. 10, кв. 10.

11. Explain the role of the business press in the marketing of products and services.
The business press is a key component of the marketing mix, providing a platform for companies to communicate their value proposition to a targeted audience. It plays a crucial role in building brand awareness, establishing credibility, and driving sales. The business press also serves as a source of market intelligence, providing insights into industry trends, competitor activities, and consumer behavior. By leveraging the business press, companies can effectively reach their target market and achieve their marketing objectives.

ANSWER: $\frac{1}{2}$ (100% of the H_2 is used up, and 50% of the H_2O is used up)

" O dispõe os como nica o quadro seguinte .

$$3a^2 \cdot 5x^2y - 7a^2x^2 + 7ax^3 - x^4 - 5$$

$$\frac{\partial \alpha^a}{\partial x^b} = \frac{5x^2 - 4 - 2x^2 x^2 + 2x^2 x^2 - x^4 - 5}{2x^4 - 4x^2 x^2 - 4x^2 x^2 - 10x^2 x^2 - 3x^4 - 6x^4}$$

4. Inserir, a redação, los termos de cada coluna

Para a primeira coluna da esquerda, diz-se :

Para a segunda,

$$-5a^2x + 5a^2x - a^2x = 0.$$

Para a terceira,

$$8a^2x^2 - 7a^2x^2 + 2a^2x^2 = a^2x^2$$

e assim por diante. A soma procurada é

$$6a^4 - a^2x^2 - 7a^2x^2 - 3x^4 + 1.$$

M. a de adição na terceira

dos polinômios

$$a - b + c - d, \quad b - a + d - a, \quad c - d + a - b$$

escreve-se.

$$(a - b + c - d) + (b - a + d - a) + (c - d + a - b)$$

III. Subtração de monômios.

2a. Regra. — Subtrai-se um monômio de uma quantidade a , mudando a sinal de b e acrescentando esta letra a a .

Ex. a) Se $a = 10$ e $b = 2$, a diferença não pode ser senão $a - b$, pois que

Seja a a subtração de a a b para p a cada $a - b$.
 b) Se $a = 10$ e $b = 2$, a diferença não pode ser senão $a - b$, pois que

Daí deduzem-se os corolários seguintes :

Corolário I. — Subtrair $-b$, é acrescentar $+b$, pois que

Corolário II. — Acrescentar $-b$, é subtrair $+b$, porque

Da regra precedente resulta ainda que :

$$\begin{aligned} 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 10 &= 10 \end{aligned}$$

IV. Subtração de polinômios

2a. Regra. — Para se obter a diferença de dois polinômios é preciso mudar os sinais de todos os termos do subtraendo e acrescentá-lo, assim modificando, ao minuendo.

Ex. a) Se $a = 10$ e $b = 2$, a diferença procurada é

a) Se $a = 10$ e $b = 2$, a diferença procurada é $a - b$, pois que

Ex. a) Se $a = 10$ e $b = 2$, a diferença procurada é $a - b$, pois que

$$a^2 - b^2 - 2a^2b + 3ab^2 \text{ e } 3a^2b - 3ab^2 + 3a^2 - 4b^2$$

Procura-se os sinais do segundo polinômio, que vem a ser

$$3a^2b + 3ab^2 - 3a^2 - 4b^2.$$

e acrescenta-se este polinômio ao primeiro. Obtem-se

$$a^2 - b^2 - 2a^2b - 3ab^2 - 2a^2b + 3ab^2 - 3a^2 + 4b^2$$

e, depois de redução :

Ex. a) Se $a = 10$ e $b = 2$, a diferença procurada é

2a. Regra. Quando os dois polinômios têm termos semelhantes, na prática, observa-se a regra seguinte

Para se obter a diferença de dois polinômios que têm termos semelhantes, mudam-se todos os sinais do polinômio a subtrair depois somam-se estes dois polinômios, colocando-os um debaixo do outro de modo que os termos semelhantes se correspondam, afinal faz-se a redução.

Ex. a) Se $a = 10$ e $b = 2$, a diferença procurada é $a - b$, pois que

$$\begin{aligned} a^2 + 7a^2b - 4a^2b^2 + 2a^2b^2 - 3b^4 \\ a^2 - 8a^2b + 4a^2b^2 - 4ab^2 + 4b^4 \\ \hline a^2b \end{aligned}$$

Depois de redução, acha-se a diferença

$$a^2b - 2a^2b^2 - b^4$$

Observação. — Para indicar que a expressão algébrica a ser subtraída de outra é preciso escrevê-la entre parêntesis e fazê-la preceder do sinal

Adm para indicar que o polinômio $a - b + c - d$ do exemplo subtraído de P , se escreve

$$P - (a - b + c - d)$$

A expressão $a - b + c - d$ escreve-se

EXERCÍCIOS SOBRE A ADICÃO E A SUBTRAÇÃO

Somar os monômios seguintes e reduzir:

66. $3a, 5b^2, -7a, ab, -4b^2, 1$

67. $4x, -8y, 2x, -\frac{5x}{8}, \frac{y}{8}, 3y, -4z, 2$

68. $x^2, -x^2, m, -1, x^2, m^2, ab, -x, x^2, 1$

69. $4a^2b, 3a^2b^2, -3a^2b, 2a^2b^2, 1$

70. $\frac{m}{2} - \frac{m}{3} + \frac{m}{4} - \frac{m}{5}$

71. x^2, x^2, x^2, x^2, x^2

Somar os polinômios seguintes:

72. $a+b-c, a-b+c$

73. $a+b, a-b+c, b+c-d$

74. $1-a-b, 3a+b-4c$

75. $3a^2-4ab+5b^2-1, 7a^2+9ab-4b^2+2$

76. $4x^2-2x^2+2x^2-x+1, x^2-x^2-x^2+2x^2+1$

77. $5a^2-7a^2b^2+3ab^2-b^2, 7a^2b^2-2a^2b+2b^2-3ab^2+6$

78. $a^2-b^2, 2c, a^2, b^2$

79. $5, a, c, a^2, b^2$

80. $2, a, 3a^2, a, 2c$

81. $8, c, 2, 8, b$

82. $(a^2-b^2+c^2), (a^2-2ab+x^2), (a^2-1), (a^2-1), (a^2-1), (a^2-1)$

Sabendo que

$A=a+b+c, C=a+b-c$

$D=a-b+c, E=a-b-c$

formar as expressões seguintes

83. A

84. $A+B$

85. $B+C$

86. B

87. $A+B+C$

88. $A+B+C+D$

89. $A+B+C+D$

90. $A+B+C+D$

91. $A+B+C+D$

92. $A+B+C+D$

93. $A+B+C+D$

94. $A+B+C+D$

95. $A+B+C+D$

96. $A+B+C+D$

97. ax^2+bx^2+cx+d

98. bx^2+cx^2+dx+e

99. dx^2+ex^2+bx

100. A

101. $A+B$

102. $B+C$

103. $A+B+C$

104. $A+B+C+D$

105. $A+B+C+D$

106. $A+B+C+D$

107. $A+B+C+D$

108. $A+B+C+D$

109. $A+B+C+D$

110. $A+B+C+D$

111. $A+B+C+D$

112. $A+B+C+D$

113. $A+B+C+D$

114. $A+B+C+D$

115. $A+B+C+D$

116. $A+B+C+D$

117. $A+B+C+D$

118. $A+B+C+D$

119. $A+B+C+D$

120. $A+B+C+D$

121. $A+B+C+D$

122. $A+B+C+D$

123. $A+B+C+D$

124. $A+B+C+D$

125. $A+B+C+D$

126. $A+B+C+D$

127. $A+B+C+D$

128. $A+B+C+D$

129. $A+B+C+D$

130. $A+B+C+D$

131. $A+B+C+D$

132. $A+B+C+D$

133. $A+B+C+D$

134. $A+B+C+D$

135. $A+B+C+D$

136. $A+B+C+D$

137. $A+B+C+D$

138. $A+B+C+D$

139. $A+B+C+D$

140. $A+B+C+D$

141. $A+B+C+D$

142. $A+B+C+D$

143. $A+B+C+D$

144. $A+B+C+D$

145. $A+B+C+D$

146. $A+B+C+D$

147. $A+B+C+D$

Sabendo que :

$$A = a^2 - 2ab + ab^2 - 2b^3$$

$$B = 2a^2 + 3ab + 2b^2$$

$$C = 4a^2 + ab^2 - 4b^3$$

$$D = 2a^2 - 4ab^2 - 3ab^3 - 1b^4$$

Calcule as expressões seguintes

$$136 \quad A$$

$$137 \quad B$$

$$138 \quad C$$

$$139 \quad A$$

$$140 \quad B$$

$$141 \quad C$$

$$142 \quad C - B - A$$

$$143 \quad (A+B) - (C+D)$$

$$144 \quad (A-B) - (C-D)$$

$$145 \quad A + B + C + D$$

$$146 \quad A - B + C - D$$

$$147 \quad A - (B + C + D)$$

resolva os problemas seguintes :

148. Num passeio a ilha passou uma $a + 40$ pessoas para ir a $2a - 1800$ para voltar. Num segundo passeio a ilha se foram $8a - 3250$ pessoas mais. Quantas pessoas foram para a ilha no primeiro e no segundo passeio?

149.

149. Fala-se muito sobre o uso de computadores. Que é a diferença entre um computador e um sistema de computadores? Que vantagens tem o uso de computadores em relação ao uso de sistemas de computadores?

150. Um grupo de pessoas foi para uma excursão. O grupo foi dividido em 3 grupos. O primeiro grupo foi para a montanha, o segundo grupo foi para o rio e o terceiro grupo foi para o campo. Quantas pessoas foram para cada um dos lugares?

151. Um produtor ganhou um determinado lucro. O lucro foi dividido em 3 partes. A primeira parte foi para o produtor, a segunda parte foi para o governo e a terceira parte foi para o banco. Quantas partes foram para cada um dos lugares?

152. A idade de um pai é a e a idade de um filho é b . O pai é mais velho que o filho. Quantos anos o pai tem mais que o filho?

153. Responda ao artigo quanto aos pontos seguintes. A 1ª questão é sobre a importância da educação para o desenvolvimento do país. A 2ª questão é sobre a importância da educação para o desenvolvimento do indivíduo.

154. Um grupo de pessoas foi para uma excursão. O grupo foi dividido em 3 grupos. O primeiro grupo foi para a montanha, o segundo grupo foi para o rio e o terceiro grupo foi para o campo. Quantas pessoas foram para cada um dos lugares?

155. Um produtor ganhou um determinado lucro. O lucro foi dividido em 3 partes. A primeira parte foi para o produtor, a segunda parte foi para o governo e a terceira parte foi para o banco. Quantas partes foram para cada um dos lugares?

CA - 1 - 11

I - Precedentes

5. Definição -- Multiplicar duas expressões algébricas A e B é formar uma 3ª expressão que tenha um valor numérico sempre igual ao produto dos valores numéricos das duas primeiras quando as mesmas letras são substituídas pelas mesmas numéricas nas 3 expressões.

3. Regra dos sinais. Dois números de mesmo sinal tem produto positivo e de sinais contrários tem produto negativo.

Essa regra é verdadeira para todos os números e para todas as potências. Basta lembrar-se que o produto de dois números de mesmo sinal é positivo e o produto de dois números de sinais contrários é negativo.

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

Sejam a e b dois números e x uma letra. Então o produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax . O produto de a e b é ab e o produto de a e x é ax .

$1+5$ fa. ores iguais a 6, porlan.º segundo a definição do expoente, isto prova to é

$$a^1 \cdot a^5 = a^{1+5} = a^6.$$

Em geral, se, a multiplicar a^m o a^n

Segundo a definição do expoente, temos:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots}_{m \text{ factores}} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots}_{n \text{ factores}}$$

Multiplicando membro a membro, vem:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots}_{m+n \text{ factores}} \quad (1)$$

O 2º membro da igualdade (1) consta de $m+n$ factores iguais a a e vale a^{m+n}

$$\text{Logo:} \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Aplicações. — Segundo as regras precedentes a 42 pôdo-se escrever:

$$\begin{array}{l} 1^\circ \quad a^3 \cdot a^4 = a^7 \\ 2^\circ \quad a^5 \cdot a^2 = a^7 \\ 3^\circ \quad a^6 \cdot a^1 = a^7 \\ 4^\circ \quad a^7 \cdot a^0 = a^7 \end{array}$$

III. Produto de dois monómios

43. Regra — Para se obter o produto de dois monómios

1.º Observa-se a regra dos sinais,

2.º Multiplicam-se os coeficientes

3.º Escrevem-se as diferentes letras, cada uma com a soma de seus expoentes

Sejam os dois monómios $7a^3b^2d$ e $9a^2bc^2d^2$. Para se obter o produto, basta multiplicar entre si todos os factores que os compõem. Temos

$$7a^3b^2d \times 9a^2bc^2d^2 = 7 \cdot 9 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b \cdot c^2 \cdot d \cdot d^2$$

o, invertendo os factores

$$7a^3b^2d \times 9a^2bc^2d^2 = 7 \cdot 9 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b \cdot c^2 \cdot d \cdot d^2$$

Enfim, applicando a regra da multiplicação de duas potências da mesma letra (32) temos assim a conta:

$$7a^3b^2d \times 9a^2bc^2d^2 = 63a^5b^3c^2d^3$$

Se os sinais dos factores fossem contrários ou ambos negativos, teríamos:

$$(-7a^3b^2d) \times (-9a^2bc^2d^2) = 63a^5b^3c^2d^3$$

44. Produto de um numero qualquer de monómios. Para se obter o produto de varios monómios, multiplica-se o primeiro monómio pelo segundo, depois multiplica-se o produto assim obtido pelo terceiro monómio e assim por diante.

Segundo esta regra, o produto

$$(-4a^2b^3) \times 7a^2b^4 \times 2ab^2,$$

é to $-56a^5b^9$, ou seja, multiplica-se $-48a^2b^3$ por $-2ab^2$. O primeiro resultado é, mais $56a^5b^9$.

IV. Potências de um monómio.

45. Regra — Para se elevar um monómio a uma potência de qualquer natureza é preciso elevar a esta potência todos os factores do monómio.

1.º Caso. — Seja elevar á quinta potência o monómio a^3 . Temos:

$$a^3 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{15} = a^{3 \cdot 5},$$

em geral,

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

2.º Caso. — Seja elevar ao cubo o monómio positivo $5a^4b^2c^3d$. Temos

$$5a^4b^2c^3d^3 = 5 \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot c^3 \cdot c^3 \cdot d \cdot d \cdot d$$

Mas por causa da regra 34. temos ainda

$$5a^4b^2c^3d^3 = 5a^4 \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot d^3 = 5a^{12}b^6c^9d^9$$

o, em geral,

$$(axy^bz)^n = a^n x^{n \cdot y} b^{n \cdot z}$$

Na pratica para se elevar um monómio a qualquer potência, eleva-se o coeficiente a essa potência multiplica-se os expoentes de cada letra pelo índice da potência.

Corollario — Logo 1.º elevando-se qualquer número a uma potência par, o resultado é positivo. — 2.º elevando um número negativo a uma potência ímpar, o resultado é negativo.

EXEMPLOS

$$1^\circ (-a)^4 = a^4$$

$$2^\circ (+a)^3 = a^3$$

$$3^\circ (-a) = -a$$

$$4^\circ (+a)^2 = a^2$$

EXERCÍCIOS SOBRE A MULTIPLICAÇÃO DE MONÓMIOS

Obter os produtos indicados

$$105 \quad 5 \times (-2) \times (-1)$$

$$106 \quad -5 \times (-2) \times (-2)$$

$$107 \quad (-1) \times 2 \times (-3)$$

$$108 \quad -2 \times 2 \times 5 \times 4 = 7 \times 0$$

$$109 \quad -1 \times (-1)$$

$$110 \quad (-2)^3 \times (-7)^4$$

$$111 \quad 1 \times (-2)^3$$

$$112 \quad 1 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times 12 \times 14$$

$$103$$

$$111$$

$$113$$

$$114$$

$$115$$

$$116$$

$$117$$

$$118$$

$$119$$

$$120$$

$$\begin{aligned}
 171. & 2x \times 5y \\
 172. & x^2y^3 \times x^4y^2 \\
 173. & 2xy(2xy \times 3xy) \\
 174. & x^2(2x^2 - 3x) \\
 175. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 176. & 6a^2b^2c^2(-8a^2b^2c^2x^2y^2 \times 3a^2b^2c^2x^2y^2) \\
 177. & (-16x^2y^2 - 6y^2x^2y^2) \\
 178. & (-x^2)(-8x^2)(-2x) - 4 \\
 179. & x^2 \times (2y^2 - y^2) \times (x^2 - 3xy)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 180. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 181. & 9x^2 \times 7x \\
 182. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 183. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 184. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 185. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 186. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 187. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 188. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 189. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 190. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 191. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 192. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 193. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 194. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 195. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 196. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 197. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 198. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 199. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 200. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 201. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 202. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 203. & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2)
 \end{aligned}$$

PROBLEMAS A RESOLVER

217. Um homem dá a centos de reis ao filho mais velho, ao segundo filho e enfim, o 3º recebe tanto quanto o 1º mais 3 vezes o 2º.
218. Um homem dá a centos de reis ao filho mais velho, ao segundo filho e enfim, o 3º recebe tanto quanto o 1º mais 3 vezes o 2º.
219. Um homem dá a centos de reis ao filho mais velho, ao segundo filho e enfim, o 3º recebe tanto quanto o 1º mais 3 vezes o 2º.
220. Em um jogo de 56 cartas, foram se primeiro a cartas na sequência e enfim, o 3º recebe tanto quanto o 1º mais 3 vezes o 2º.

CAPÍTULO IV

L Produto de um polinômio por um monômio.

Exemplo
monômio, multiplica-se cada termo do polinômio pelo monômio.

$$\begin{aligned}
 & (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\
 & = x^2(x^2 - 3x + 2) + 2x(x^2 - 3x + 2) - 1(x^2 - 3x + 2) \\
 & = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x^3 - 6x^2 + 4x - x^2 + 3x - 2 \\
 & = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2
 \end{aligned}$$

Totalizando por colunas

$$\begin{array}{r}
 a \quad b \quad c \quad d \\
 m \quad n \quad p \quad q \\
 m \quad n \quad p \quad q \\
 m \quad n \quad p \quad q \\
 m \quad n \quad p \quad q
 \end{array}$$

O produto é um binômio em dm , o que demonstra a validade da regra.

Nota

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

Aplicações

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

1. x 2. x 3. x 4. x 5. x 6. x 7. x 8. x 9. x 10. x

37. Produto de um monômio por um polinômio. — Para se multiplicar um monômio por um polinômio, multiplica-se cada termo do polinômio pelo monômio.

Com efeito, pode-se inverter a ordem de dilações sem alterar o produto. Assim, temos

$$(-3a^2)(a^2b^3 - a^2b^2 + 4b^2) = a^2b^3 - a^2b^2 + 4b^2(-3a^2) \\ = -3a^4b^3 + 3a^4b^2 - 12a^4b^2.$$

II Multiplicação de polinômios

38. Regra. — Para se multiplicar dois polinômios, multiplica-se cada termo do primeiro por todos os termos do segundo, e faz-se a soma dos resultados.

Seja multiplicar os polinômios $A = a - b$ e $B = c - d$; teremos:

$$AB = (a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.$$

Com efeito, temos (Nº 33),

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.$$

Ora, substituindo B por seu valor $c - d$, vem

$$AB = a(c - d) - b(c - d)$$

$$AB = ac - ad - bc + bd.$$

Somando membro a membro, vem afinal:

$$aB - bB \text{ ou } AB = ac - ad - bc + bd.$$

Nota. — Na prática, ordenam-se os polinômios em relação à mesma letra e, para facilitar a redução, escrevem-se os termos semelhantes uns debaixo dos outros.

Aplicação. — Multiplicar $a^2 - 2ab + b^2$ por $m - n$.

Segundo a regra, é preciso, primeiro, multiplicar $a^2 - 2ab + b^2$ por m temos o primeiro produto parcial

$$a^2m - 2abm + b^2m$$

Multiplicando depois, $a^2 - 2ab + b^2$ por $-n$, temos o segundo produto parcial

$$-a^2n + 2abn - b^2n$$

O primeiro produto parcial é a soma dos dois produtos parciais.

$$a^2m - 2abm + b^2m - a^2n + 2abn - b^2n$$

39. Regra prática. — Na prática, ordenam-se os dois polinômios de mesmo modo e em relação a mesma letra, e colocam-se um debaixo do outro. Debaxo do multiplicador, escrevem-se os

Veja-se

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ m - n \\ \hline a^2m - 2abm + b^2m \\ -a^2n + 2abn - b^2n \\ \hline a^2m - a^2n - 2abm + 2abn + b^2m - b^2n \end{array}$$

Para se multiplicar o polinômio $a^2 - 2ab + b^2$ por $m - n$, faz-se

O primeiro produto parcial é

$$a^2m - 2abm + b^2m$$

que se escreve debaixo do multiplicador

Obtem-se o produto de $a^2 - 2ab + b^2$ por $-n$ dizendo:

$$a^2 \times (-n) = -a^2n, \quad -2ab \times (-n) = 2abn, \quad b^2 \times (-n) = -b^2n;$$

e o segundo produto parcial é

$$-a^2n + 2abn - b^2n.$$

Reve-se este polinômio debaixo do primeiro produto parcial

Enfim, forma-se o terceiro produto parcial pela aplicação de $a^2 - 2ab + b^2$ por $-n$ dizendo:

$$a^2 \times (-n) = -a^2n, \quad -2ab \times (-n) = 2abn, \quad b^2 \times (-n) = -b^2n.$$

O produto resultante é

$$a^2m - a^2n - 2abm + 2abn + b^2m - b^2n$$

Is de escrevê-lo debaixo dos outros produtos parciais

A soma obtida

$$a^2m - a^2n - 2abm + 2abn + b^2m - b^2n$$

é o produto procurado.

43. Teorema. — Para dois polinômios ordenados de mesmo modo, o produto do primeiro em um termo qualquer é igual ao produto do primeiro termo do multiplicador.

Sejam os dois polinômios dados

$$A = 7x^3 - 11x^2 - 8x + 1$$

$$B = 4x^2 - 6x + 3$$

Se tomarmos $7x^3$ o primeiro termo de A , multiplicado por $4x^2$ o primeiro termo de B , o produto é $28x^5$, que é o primeiro termo de AB . Se tomarmos $-11x^2$ o segundo termo de A , multiplicado por $4x^2$ o primeiro termo de B , o produto é $-44x^4$, que é o segundo termo de AB . Se tomarmos $-8x$ o terceiro termo de A , multiplicado por $4x^2$ o primeiro termo de B , o produto é $-32x^3$, que é o terceiro termo de AB . Se tomarmos 1 o quarto termo de A , multiplicado por $4x^2$ o primeiro termo de B , o produto é $4x^2$, que é o quarto termo de AB . Se tomarmos $7x^3$ o primeiro termo de A , multiplicado por $-6x$ o segundo termo de B , o produto é $-42x^4$, que é o quinto termo de AB . Se tomarmos $-11x^2$ o segundo termo de A , multiplicado por $-6x$ o segundo termo de B , o produto é $66x^3$, que é o sexto termo de AB . Se tomarmos $-8x$ o terceiro termo de A , multiplicado por $-6x$ o segundo termo de B , o produto é $48x^2$, que é o sétimo termo de AB . Se tomarmos 1 o quarto termo de A , multiplicado por $-6x$ o segundo termo de B , o produto é $-6x$, que é o oitavo termo de AB . Se tomarmos $7x^3$ o primeiro termo de A , multiplicado por 3 o terceiro termo de B , o produto é $21x^3$, que é o nono termo de AB . Se tomarmos $-11x^2$ o segundo termo de A , multiplicado por 3 o terceiro termo de B , o produto é $-33x^2$, que é o décimo termo de AB . Se tomarmos $-8x$ o terceiro termo de A , multiplicado por 3 o terceiro termo de B , o produto é $-24x$, que é o décimo primeiro termo de AB . Se tomarmos 1 o quarto termo de A , multiplicado por 3 o terceiro termo de B , o produto é 3 , que é o décimo segundo termo de AB .

Corolário. — Daí pôde-se ver que o produto de um polinômio A pela soma dos graus dos factores.

III Fórmulas notáveis.

1. Quadrado de um binômio. O quadrado de um binômio:

1.º O quadrado do primeiro termo.

2.º O duplo produto dos dois termos.

3.º O quadrado do segundo termo.

Com efeito, multiplicando $a + b$ por $a + b$, temos

$$a + b$$

$$a + b$$

$$\begin{array}{r} a^2 \\ ab \\ ab \\ b^2 \end{array}$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Ou } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Desse regra se deduz que:

1.º O quadrado da diferença de dois números, segue:

1.º O quadrado do primeiro número.

Menos o duplo produto dos dois números.

2.º Mais o quadrado do segundo número.

Com efeito, multiplicando $a - b$ por $a - b$, temos

$$a - b$$

$$a - b$$

$$\begin{array}{r} a^2 \\ ab \\ ab \\ b^2 \end{array}$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

Aplicações. — 1.º Formar o quadrado de $4x^2 + 5$.

Segundo a regra precedente temos:

$$4x^2 + 5^2 = (4x^2)^2 + 2 \cdot 4x^2 \cdot 5 + 5^2 = 16x^4 + 40x^2 + 25$$

2.º Fazer o quadrado de $5x^2 - 7y$.

Temos

$$5x^2 - 7y^2 = (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 7y + 7y^2 = 25x^4 - 70x^2y + 49y^2$$

2. Produto da soma de dois números por sua diferença.

A soma de dois números multiplicada por sua diferença é igual à diferença dos quadrados dos dois números.

Com efeito, se tomarmos $a + b$ por $a - b$, temos

$$a + b$$

$$a - b$$

$$\begin{array}{r} a^2 \\ ab \\ ab \\ b^2 \end{array}$$

$$a^2 - b^2$$

$$\text{Ou } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Aplicações. — 1.º Fazer o produto da soma de dois números por sua diferença.

$$(5a - 3b)(5a + 3b) = 5a^2 - 9b^2 = 25a^2 - 9b^2$$

$$2.º a^2 - 1 = a + 1 \cdot a - 1$$

$$3.º a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = a^2 + b^2 - 2ab - b^2$$

$$4.º a^2y^2 - 6x^2y = 2xy + 6x^2y - 6x^2y - 6x^2y$$

$$5.º (a + 1)^2 - a^2 = a + 1 + a - a^2 - 1 = 2a$$

3. Cubo de um binômio. — O cubo de um binômio segue:

1.º O cubo do primeiro termo.

2.º O triplo produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo termo.

3.º O triplo produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo termo.

4.º O cubo do segundo termo.

Com efeito, se tomarmos:

$$a + b^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Com efeito, se tomarmos esta multiplicação,

$$a + b$$

$$a + b$$

$$a + b$$

$$\begin{array}{r} a^3 \\ 3a^2b \\ 3ab^2 \\ b^3 \end{array}$$

$$\text{Ou } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Desta regra se deduz que .

1.º O cubo da diferença de dois números iguala .

2.º O cubo do primeiro numero ;

3.º Menos 3 vezes o produto do quadrado de 1.º termo pelo 2.

3.º Mais 3 vezes o produto do 1.º termo pelo quadrado do 2.

4.º Menos o cubo do segundo.

em este l.º, temos :

e, efetuando esta operação,

$$a^3 - 3ab \cdot b^2 + b^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{ou} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3b + 2ab^2 - b^3$$

$$3a^2b + 8ab^2 - b^3$$

Aplicações . Segunda esta regra temos .

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$2.º \quad (5x^2 - 3y^2)^3 = 125x^6 - 855x^4y^2 + 135x^2y^4 - 87y^6$$

4.º Outras fórmulas notáveis

1

2

$$3) \quad (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$4) \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$5) \quad (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2cd + 2bd$$

As fórmulas (1) e (2) provam que $a^2 - b^2$ é divisível por $a+b$ e que $a^3 + b^3$ o é por $a+b$.

A fórmula (3) mostra que a diferença dos cubos de dois números que diferem da unidade iguala 3 vezes o produto destes nú meros aumentado de 1.

d' plos produtos dos a dois de todos os termos.

EXERCÍCIOS SOBRE A MULTIPLICAÇÃO ALGÉBRICA

Efetuar as operações indicadas :

$$221 \quad (x-1)x^2$$

$$222 \quad (4a^2 - a^2)a^2$$

$$223 \quad (-a^2 + a - 1)(-a^2)$$

$$224 \quad (1+2xy+3x^2)(-4xy^2)$$

$$225 \quad (x^2 - 3ab)(-2ab^2)$$

$$226 \quad (x^2 - x^2y + y^2)x^2y^2$$

$$227 \quad (11a^2 - 10a^2 + 8b^2)(-3ab^2)$$

$$228 \quad (x^2 - x^2 + x - 1)(-x^2)$$

$$229 \quad (15ab^2 - 3a^2b^2 - 6a^2b^2) \times \frac{2}{3}a^2b^2$$

$$230 \quad (3a - b - 4c)^2a^2$$

$$231 \quad (a^2b + b^2c + c^2a) \times \frac{2}{3}a^2b^2c^2$$

$$232 \quad \dots$$

$$233 \quad a^2b^2c^2((a+b+c) - (ab+ac+bc) - abc)$$

Efetuar as operações indicadas :

$$234 \quad (a+x)(a-3x)$$

$$235 \quad (x-1)(x-3)$$

$$236 \quad (x+10)(x-12)$$

$$237 \quad (3x^2y - 5a^2b^2x^2y)(a^2x - a^2xy)$$

$$238 \quad (a+b)(x-y)$$

$$239 \quad (a^2b^2c^2 - a^2b^2c - 1)(a^2b^2c^2)$$

$$240 \quad (a-b-c)(a-b)$$

$$241 \quad (a^2b^2c^2 - a^2b^2c - 1)(a^2b^2c^2)$$

$$242 \quad \dots$$

$$243 \quad (a^2b^2c^2 - a^2b^2c - 1)(a^2b^2c^2)$$

$$244 \quad \dots$$

$$245 \quad (a^2b^2c^2 - a^2b^2c - 1)(a^2b^2c^2)$$

$$246 \quad (b-3a^2+3a^2b)(b-3a^2)$$

$$247 \quad x(x-1)(x+1) - (x-1)^2x$$

$$248 \quad (b-3a^2+3a^2b)(b-3a^2)$$

$$249 \quad 2x(x^2-5)(x^2+5)-3x^2$$

$$250 \quad \dots$$

$$251 \quad \dots$$

$$252 \quad \dots$$

$$253 \quad (a+b)(a-b)(a-1)$$

$$254 \quad \dots$$

$$255 \quad (a+b)(a-b)(a-1)$$

Efetuar, depois de ordenar os polinômios

$$256 \quad (3a^2 + 2b^2 + a^2)(b^2 + a^2 - 2ab)$$

$$257 \quad (1 + a^2 - a - a^2)(a + 1 - a^2 + a^2)$$

$$258 \quad a^2 + 1 - a^2 + a^2 + a(1-a)$$

$$259 \quad (a^2 + 3ab^2 - 3ab^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$260 \quad (a^2 + 3ab^2 - 3ab^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$261 \quad (4a^2x^2 + 8a^2x^2 - 2a^2x^2) 2a^2x^2 - 3a^2x^2$$

$$262 \quad (b^2 - 4a^2b + 4a^2b)(4a^2b^2 + 4a^2b^2)$$

$$263 \quad (x^2 - x^2 + x^2 + 1)(1 + x^2 - x^2)$$

$$264 \quad \dots$$

$$265 \quad (1 - 2a^2 - 6a^2 + 4a^2 - 8a^2)(5a^2 + a - 3a^2 - 7a)$$

Desenvolver e reduzir :

266. $x + y^2$

267. $x - y^2$

268. $x - 5x^2$

269. $x - 1x^2$

270. $x - 5x^2$

271. $x - 5x^2$

272. $(2a^2 - 3b^2)^2$

273. $(5a^2b - 7ab^2)^2$

274. $x^2 - 1$

275. $x^2 - 1$

276. $x^2 - 1$

277. $(x + 1)^2 - (x^2 + 1)$

278. $(x + 1)^2 - (x^2 + 1)$

279. $(a - b + c)^2$

280. $(2a - 3b + 4c)^2$

281. $(a - b + c - d)^2$

282. $2a^2 - 3b^2 + 4c^2$

283. $x^2 + y^2 - 2xy$

284. $x^2 + y^2 - 2xy$

285. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

286. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

287. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

288. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

289. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

290. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

291. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

292. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

293. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

294. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

295. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

296. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

297. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

298. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

299. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

300. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

301. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

302. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

303. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

304. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

305. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

Verificar dois números em duas condições: se a diferença dos quadrados seja um dos números seguintes:

306. $31 \quad 7 \quad 63 \quad 307 \quad 999 \quad 90 \quad 3$

Achar dois números em duas condições: se a diferença dos quadrados seja um dos números seguintes:

308. $91 \quad 310. \quad 311. \quad 1144$

Verificar as condições seguintes: se a diferença dos quadrados seja um dos números seguintes:

312. $4a^2 + 4b^2$
 313. $45x^2 + 140$
 314. $\frac{x^2}{5} + 1$
 315. $\frac{x^2}{5} + 1$
 316. $\frac{x^2}{5} + 1$
 317. $\frac{x^2}{5} + 1$
 318. $\frac{x^2}{5} + 1$
 319. $\frac{x^2}{5} + 1$
 320. $\frac{x^2}{5} + 1$

REGRAS DAS SINAES

1. Regra dos sinais

Definição. Sejam A e B duas expressões algébricas. A regra dos sinais diz que, se A e B forem duas expressões algébricas, o produto AB terá o mesmo sinal de A e B se ambos forem positivos ou negativos, e o sinal contrário se um for positivo e o outro negativo.

10. Regra dos sinais. — Para números de m e n sinais, o produto mn terá o mesmo sinal de m e n se ambos forem positivos ou negativos, e o sinal contrário se um for positivo e o outro negativo.

Em caso de dúvida, a regra é a seguinte:

$$+ \times + = +$$

$$+ \times - = -$$

$$- \times + = -$$

$$- \times - = +$$

Como um produto dividido por um factor dá o outro factor, vem:

$$\frac{ab}{b} = a \quad \frac{ab}{a} = b$$

$$\frac{ab}{b} = a \quad \frac{ab}{a} = b$$

Exemplo. Se $a = 10$ e $b = 5$, então $ab = 50$. Se $a = -10$ e $b = 5$, então $ab = -50$. Se $a = 10$ e $b = -5$, então $ab = -50$. Se $a = -10$ e $b = -5$, então $ab = 50$.

Aplicações. A regra dos sinais é aplicada nas seguintes situações:

1. $(-10) \times 5 = -50$
 2. $10 \times (-5) = -50$
 3. $(-10) \times (-5) = 50$

Observação. — A regra dos sinais é aplicada nas seguintes situações:

1. Divisão de duas potências de uma mesma letra.
2. Divisão de dois monómios.
3. Divisão de um polinómio por um monómio.
4. Divisão de dois polinómios.

II Divisão de duas potências de uma mesma letra.

17 Regra. — Para se dividir duas potências de uma mesma letra, observa-se a regra dos expoentes e dá-se à letra um expoente igual à diferença entre o expoente da de dividendo e o do divisor.

Seja dividir a^4 por a^2 . O quociente procurado multiplicado por a^2 , deve reproduzir a^4 e não pôde ser senão a^{4-2} ou a^2 temos pois :

$$a^4 : a^2 = a^{4-2}$$

B, em geral

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Aplicação. — Registra-se a regra precedente e das ex. 17 e 18. Temos

$$\begin{array}{r} a^4 : a^2 = a^{4-2} \\ a^6 : a^3 = a^{6-3} \\ a^8 : a^4 = a^{8-4} \\ a^{10} : a^5 = a^{10-5} \\ a^{12} : a^6 = a^{12-6} \end{array}$$

III Expoente zero.

18 Teorema. — Toda a quantidade elevada ao expoente zero igua a unidade

regula a regra (17) o quociente de a^{10} por a^{10} é $a^{10-10} = a^0$; mas a^0 dividido por a^{10} dá a unidade por quociente; podemos escrever

$$a^0 : a^0 = a^0 = 1$$

Do mesmo modo, temos,

$$a^{10} : a^{10} = a^0 = 1$$

EXEMPLOS

1º $9^0 = 1$

2º $1000^0 = 1$

3º $(ax^3 + bx + c)^0 = 1$

4º $3a^0 - 2 + 4b^0 - a^0 = 3 - 2 + 4 - 1 = 4$

IV Expoente negativo.

19 Teorema. — Toda a quantidade elevada ao um expoente negativo equa-se a uma fração tendo por numerador 1 e por denominador esta mesma quantidade com o expoente positivo

Devemos ter, por exemplo: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

com efeito, dividamos a^0 por a^2 , segundo a regra 17, temos,

$$a^0 : a^2 = a^{0-2} = a^{-2} \quad (1)$$

De outra parte, o quociente de a^0 por a^2 não muda dividido estas duas quantidades por a^2 , o temos

$$\frac{a^0}{a^2} : \frac{a^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} \quad (2)$$

$$P. a^0 : a^2 = \frac{1}{a^2} \quad \text{e} \quad a^2 : a^2 = 1$$

$$a^0 : a^2 = \frac{1}{a^2}$$

e em geral,

$$a^0 : a^n = \frac{1}{a^n}$$

EXEMPLOS

1º $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

2º $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

3º $a^0 = \frac{a^2}{a^2}$

4º $\frac{a^2}{a^2} = a^0$

V Divisão de monômios

20 Regra. — Para se dividir duas monômios, divide-se a letra e se faz o quociente. 1º

2º Divide-se os expoentes

3º Escreve-se cada letra com o quociente com o de, sendo igual à diferença entre o expoente da dividendo e o divisor

Seja dividir $20a^{10}b^5c^4$ por $5a^2b^3$; o quociente será,

$$4a^8b^2c^4$$

Com efeito, esse quociente multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo e que vem indicado pela identidade,

$$4a^8b^2c^4 \cdot 5a^2b^3 = 20a^{10}b^5c^4$$

É adiverte que se deve observar a regra dos sinais.

Aplicação Dividir a^2bcd por $7a^4$

Segundo a regra, diremos:

$$\begin{array}{r} a^2bcd \\ 7a^4 \end{array}$$

O quociente é pois $-3ba^4$.

51. Caso em que a divisão não se faz exatamente. Quando a divisão não se faz exatamente, põe-se o quociente sob a forma de fração que se simplifica dividindo os dois monómios pelos factores comuns.

Exemplo — Dividir $6a^2b$ por $8a^3b^2$

O quociente é

$$\frac{3}{4a}$$

52. Regra. Para dividir um polinómio por um polinómio, se o divisor tem um divisor comum aos dois, divide-se primeiro o dividendo e o divisor pelo divisor comum, e vem

$$\frac{a}{abc^2}$$

como quociente, a proporção

53. Divisão de um polinómio por um monómio.

54. Regra. Para dividir um polinómio por um monómio, divide-se cada termo do polinómio pelo divisor, e vem o resultado.

Seja dividir por m o polinómio $a-b+c-d$. O quociente é

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}$$

pois que multiplicando-se esta expressão por m , reproduz-se o dividendo $a-b+c-d$.

Aplicação — Dividir o polinómio da divisão de $8a^3 - 4a^2b - 28a^2b^2$ por $4a^2$

Segundo a regra (52), este quociente é

$$\frac{8a^3}{4a^2} - \frac{4a^2b}{4a^2} - \frac{28a^2b^2}{4a^2} = 2a - b - 7b^2$$

ou simplificando,

$$2a - b - 7b^2$$

Divisões impossíveis. Quando a divisão não se faz exactamente, escreve-se o quociente sob a forma de fração que se simplifica.

Assim o quociente de

$$\frac{a^2b^3 - a^2bcd + a^2b^2c}{a^2b^2c^2}$$

$$\text{é } \frac{a^2b^3}{a^2b^2c^2} - \frac{a^2bcd}{a^2b^2c^2} + \frac{a^2b^2c}{a^2b^2c^2}$$

ou simplificando,

OPERAÇÕES SOBRE OS TRÊS PRIMEIROS CASOS DA DIVISÃO

Efetuar as operações indicadas:

328. $a^2 \div (-a^2)$	332. $a^2 \div a^2$
327. $a^2 \div a^2$	333. $a^2 \div a^2$
328. $a^2 \div a^2$	334. $a^2 \div a^2$
329. $a^2 \div a^2$	335. $a^2 \div a^2$
330. $a^2 \div a^2$	336. $a^2 \div a^2$
331. $a^2 \div a^2$	337. $a^2 \div a^2$

Efetuar as operações seguintes fazendo desaparecer os expoentes nulos ou negativos

338. $a^2 \div a^2$	345. $a^2 \div a^2$
339. $a^2 \div a^2$	346. $a^2 \div a^2$
340. $a^2 \div a^2$	347. $a^2 \div a^2$
341. $a^2 \div a^2$	348. $a^2 \div a^2$
342. $a^2 \div a^2$	349. $a^2 \div a^2$
343. $a^2 \div a^2$	350. $a^2 \div a^2$
344. $a^2 \div a^2$	351. $(a^2 + a^2) \div (a^2 - a^2)$

Efectuar as operações indicadas

162	x^4	357
163	x^4	358
154		359
355	$a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2$	360
368	$2a^2b^2c^2 + (-2a^2b^2c^2)$	361
362	$(16x^4 + 12x^2y + 1, y^2 + 1)(4x^2 + 1, 4y + 1, 1)$	
363	$-35a^2b^2c^2 + (-7a^2b^2c^2)$	

Simplificar os quocientes das divisões seguintes:

364	$9a^2b^2c^2 + 1 - 8a^2c^2$	369	$(-250a^2b) \div$
365		370	
366	$a^2x^2y^2 + a^2x^2y$	371	
367	$a^2x^2y^2 + a^2x^2y^2$	372	
368		373	$(a+b)(a-b)^2$
			$= (a+b)(a-b)^2$

Efectuar as divisões indicadas e simplificar o quociente quando a

374	$x^2 + x$	378	$x^2 + 1$
375	$x^2 + 2x$	379	$x^2 + 1$
376	x^2	380	x^2
377		381	x^2
		382	x^2
383	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$		
384	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$		
385	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$		
386	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$		
387	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$		
388	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$		
389	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$	395	
390	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$	396	
391	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$	397	
392	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$	398	
393	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$	399	
394	$16a^2b^2c^2 + 16a^2b^2c^2 - 35a^2b^2c^2$	400	
		401	
		402	

ALFRED A.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS INTEIROS EM x 1 Divisão dos polinômios inteiros em x

51. Definição. Dado um polinômio A inteiro em x por outro polinômio B inteiro em x , é achar um polinômio Q inteiro em x , tal que a diferença $A - BQ$ seja um polinômio de grau menor que o divisor B .

A diferença $A - BQ$ chama-se resto da divisão e designa-se por R .

Temos portanto,

$$A = BQ + R$$

55. Regra. — Para se obter o quociente de dois polinômios inteiros em x

1.° Ordenam-se os polinômios segundo as potências decrescentes de x .

Divide-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor: o resultado é o primeiro termo do quociente.

3.° Subtrai-se do dividendo o produto do divisor pelo termo obtido no quociente, e ordena-se o resto, que é o primeiro dividendo parcial.

4.° A divisão do primeiro termo deste dividendo parcial pelo primeiro termo do divisor fornece o segundo termo do quociente.

5.° Depois de subtrair do primeiro dividendo parcial o produto do divisor pelo segundo termo do quociente, obtém-se, para resto o segundo dividendo parcial cujo primeiro termo dividido pelo primeiro termo do divisor dá o terceiro termo do quociente.

6.° Continua-se deste modo até se obter um dividendo parcial nulo ou de grau inferior ao do divisor.

Este último dividendo parcial é o resto da divisão.

Seja A o polinômio

$$A = 77x^5 - 49x^4 + 88x^3 - 75x^2 - 2x + 10$$

pelo polinômio

$$B = 11x^3 - 7x$$

Logo Q é o primeiro termo de A dividido pelo primeiro termo de B , isto é, $7x^2$. Subtraindo $7x^2$ de A , obtemos R , de modo que $A = B \times Q + R$.

$$A = B \times Q + R$$

Logo R é o resto da divisão de A por B . Logo R é o resto da divisão de A por B .

$$\begin{array}{r} 77x^5 - 49x^4 + 88x^3 - 75x^2 - 2x + 10 \\ 11x^3 - 7x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 66x^3 - 49x^2 + 22x + 10 \\ -66x^3 + 42x^2 + 24x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -33x^2 + 22x + 10 \\ +33x^2 - 21x - 12 \end{array}$$

$$x - 2$$

O primeiro termo de A é $77x^5$ e o primeiro termo de B é $11x^3$. Logo o primeiro termo do quociente é $7x^2$. Subtraindo $7x^2$ de A , obtemos R , de modo que $A = B \times Q + R$.

$$66x^3 - 49x^2 - 2x + 10$$

representa o primeiro dividendo parcial.

Este dividendo parcial é dividido pelo primeiro termo do divisor, isto é, $11x^3$, para obter o primeiro termo do quociente, isto é, $6x$.

O primeiro termo do quociente é $6x$. Logo o primeiro termo do quociente é $6x$. Logo o primeiro termo do quociente é $6x$.

Depois de subtrair do segundo dividendo parcial o produto do divisor por $6x$, vem

$$-33x^2 + 22x + 10$$

para o segundo dividendo parcial.

Continuando como acima, divide-se $-33x^2$ por $11x^3$ e vem -3 para o terceiro termo do quociente.

O produto do divisor por -3 , subtraído do segundo dividendo parcial, dá o resto $x - 2$. Logo a divisão é possível.

O quociente da divisão é pois

$$7x^2 + 6x - 3$$

e o resto é $x - 2$.

Logo a divisão é possível e o quociente é $7x^2 + 6x - 3$ e o resto é $x - 2$.

Isto resulta na igualdade

$$A = BQ + R$$

67. Aplicações. Seja A o dividendo $x^3 + a^3$ por $x + a$.

Ordenados em relação a x , os polinômios dispõem-se para uma divisão aritmética.

$$\begin{array}{r} x^3 + a^3 \\ x + a \end{array}$$

Segundo a regra, divide-se x^3 por x , o que dá x^2 para o primeiro termo do quociente. Logo o primeiro termo do quociente é x^2 .

O produto do divisor pelo primeiro termo x^2 do quociente é $x^3 + ax^2$.

Logo se subtrai do dividendo o produto da subtração é $-ax^2 - a^3$.

é o primeiro dividendo parcial.

O segundo termo do quociente é

Logo se subtrai do primeiro dividendo parcial o produto do divisor por $-ax$ dá

Logo se subtrai do primeiro dividendo parcial. O resultado é $a^2x + a^3$.

é o segundo dividendo parcial.

Então, o resto será o quociente Q e o resto R .

O produto da divisão por a^2 ou

subtraído da divisão paralela dá o mesmo resto. O quociente

$$Q = \frac{P - R}{a^2}$$

II. Divisibilidade dos polinômios em fatores em x por binômios da forma $x - a$

54. Teorema. O resto da divisão de um polinômio P em $x - a$ pela binômio $x - a$ obtém-se substituindo x pela letra a neste polinômio.

Para o demonstrar, representemos por Q o quociente e R o resto da divisão de P por $x - a$, temos:

$$P = (x - a)Q + R$$

Nesta igualdade existe uma única letra x e vale a lei da substituição que em toda divisão, o dividendo iguala sempre o produto do divisor pelo quociente mais o resto.

Podemos, pois, substituir x por a . Substituindo x por a , o produto $(x - a)Q$ anula-se, P anula-se, logo R designamos por P_a e não mudamos a letra a que o resto R se anula quando $x = a$. Não costuma-se

A demonstração

temos pois a

$$P_a = R, \text{ ou } R = P_a$$

Logo O resto da divisão

55. Exemplo. — Um polinômio P dividido por $x - a$ quando se anula substituindo x pela letra a .

Se P dividido x pela letra a na identidade

$$P = (x - a)Q + R,$$

temos

$$R = P_a.$$

Se $P_a = 0$, temos $R = 0$

$$R = 0 \text{ ou } R = 0$$

56. Aplicação. — 1.º achar o resto da divisão de $x^3 - a^3$ por $x - a$

Substituímos x por a na expressão $x^3 - a^3$ que vem a ser

$$a^3 - a^3 = 0$$

Teremos, pois

$$R = 0$$

2.º achar o resto da divisão de $a^3 - b^3$ por $a - b$

Substituímos a por b , logo nos

$$R = b^3 - b^3 = 0$$

O polinômio $a^3 - b^3$ é, pois, divisível por $a - b$.

3.º achar o resto da divisão de $a^3 + ab - a - b$ por $a + b$

O divisor $a + b$ pode-se escrever $a - (-b)$, obtivemos o resto da divisão substituindo a por $-b$. Temos,

$$R = (-b)^3 + (-b) - (-b) - b = -b^3 - b + b + b = 0$$

4.º achar o valor que a deve ter para que $x - a$ seja divisor de $x^2 + 2x + 1$

Para que $x - a$ divida $x^2 + 2x + 1$ é preciso que este polinômio se anule quando $x = a$ (59.º parágrafo).

É preciso pois que tenhamos:

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \text{ ou } (a + 1)^2 = 0.$$

Extraindo a raíz quadrada dos dois membros, vem:

$$a + 1 = 0 \text{ donde } a = -1$$

Assim, para que $x - a$ divida $x^2 + 2x + 1$, é preciso que $a = -1$

III. Factorização ou decomposição em fatores

Factorizar ou decompor em fatores é estabelecer a expressão em um produto de varios factores. Em alguns casos a factorização

1.º Caso. Quando todos os termos de um polinômio contêm um mesmo factor, pôde-se suprimir este factor em cada termo do polinômio e depois indicar a multiplicação da soma dos termos assim modificados pelo factor suprimido

Esta operação chama-se *pôr em evidência o factor comum*.
Esta regra resulta da igualdade

$$(a-b+c-d)m+em-dm$$

demonstrada no numero 38, que se pôde escrever

$$a-m-b+m+c-m-d+m$$

Aplicações. 1.º *Decompôr em factores o polinómio.*

Os termos deste polinómio contém todos um factor comum a^2 , de sorte que se pôde escrever:

$$4a^5-8a^3-12a^2=4a^2(a^3-2a-3).$$

2.º *Decompôr em factores o polinómio*

$$a^2b^2c^2+ab^2c^2+ab^2c^2+ab^2c^2$$

Os termos têm o factor ab^2c^2 , portanto o polinómio pôde escrever-se

$$4ab^2c^2(a+3)$$

3.º *Caso.* - Quando um polinómio é quadrado perfeito,

1.º Exemplo: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,

2.º $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$,

3.º $a^2+2ab+b^2+c^2=(a+b+c)^2$,

assim por diante.

3.º *Caso.* - Quando um polinómio é cubo perfeito, pode-se identificar a quarta parte cujo cubo produz o polinómio

Exemplos: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

4.º *Caso.* - Quando um polinómio é da 4.ª ordem, etc

4.º *Caso.* A diferença de dois quadrados pode se somar das raízes multiplicando por sua diferença.

É uma consequência da identidade do nº 42, e temos -

$$(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$$

Por causa da mesma propriedade aplicada duas vezes

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

Aplicando 3 vezes a mesma propriedade, temos:

$$a^8-b^8=(a^4-b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

5.º *Caso.* Por causa da teoria do nº 57 a expressão a^n-b^n é sempre divisível por $a-b$, e a expressão $a^{n+1}+b^{n+1}$ é sempre divisível por $a+b$.

Por isso, temos

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b), a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

6.º *Caso.* Em alguns casos a observação acima dos casos 4.º e 5.º permite escrever as seguintes fórmulas:

$$Exemplo: a^2+ax+bx+ab=(a+b)(a+b)$$

O exemplo nº 57 é necessário para os resultados seguintes

7.º *Caso.* Quando um polinómio é da forma $a^2+2ab+b^2$, etc

Em muitos outros casos interessantes de factoração que se encontram em alguns livros de álgebra.

EXERCÍCIOS SOBRE A DIVISÃO ALGÉBRICA

Dividir as duas expressões seguintes:

$$403. (a^2-b^2) \div (a-b)$$

$$404. (a^3+b^3) \div (a+b)$$

$$405. (x^2+y^2) \div (x^2-xy-y^2)$$

$$406. (x^2-1) \div (x-1)$$

$$407. (x^2-1) \div (x+1)$$

$$408. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$409. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$410. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$411. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$412. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$413. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$414. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$415. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$416. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$417. (a^2-b^2) \div (a-b)$$

$$418. (a^3+b^3) \div (a+b)$$

$$419. (x^2+y^2) \div (x^2-xy-y^2)$$

$$420. (x^2-1) \div (x-1)$$

$$421. (x^2-1) \div (x+1)$$

$$422. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$423. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$424. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$425. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$426. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$427. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$428. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$429. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$430. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$431. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$432. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$433. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$434. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$435. (x^2-1) \div (x^2-1)$$

$$438. (10a^2b^2c + 20a^2b^2c - 5a^2b^2c) =$$

$$437. (x^2 - a^2 - abx - ab^2 - 5x)$$

$$438. (x^3 - x^2 + x^2 + x^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2) \div (x^2 - x^2 + x - 1)$$

$$439. (a+b) \div (a-b) = 1 + \frac{2b}{a-b}$$

$$440. (a^2 + a) \div (a-b) = \frac{a^2 + a}{a-b}$$

$$441. (x^2 + 1) \div (x^2 - 1) = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$442. (a^2 + b^2) \div (a+b) = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$$

$$443. (x^2 + x^2) \div (x^2 + x^2) = 1$$

$$444. (x^2 + x^2) \div (x^2 + x^2) = 1$$

$$445. (x^2 - x^2 + x^2) \div (x^2 - 1) = \frac{x^2 - x^2 + x^2}{x^2 - 1}$$

$$446. (x^2 - x^2 + x^2 - x^2 + x - 1) \div (x^2 - x^2 + x - 1) = 1$$

Calcular os quatro primeiros termos do quociente de cada uma das seguintes divisões:

$$447. (a^2 + x^2 - 1) \div (a^2 - 1)$$

$$448. (a^2 + a - 1) \div (a - 1)$$

$$449. (a^2 + b^2 + 1) \div (a^2 - b^2)$$

$$450. 1 \div (x + a)$$

$$451. (a^2 - a^2 - a^2 - a^2) \div (a^2 - 1)$$

$$452. (a^2 - a^2) \div (a^2 - a^2)$$

$$453. (x^2 - 1) \div (x^2 - 1)$$

$$454. (a^2 - b^2) \div (a - b)$$

$$455. (a^2 - b^2) \div (a - b)$$

$$456. (a^2 - a^2) \div (a^2 - a^2)$$

Sem efetuar a divisão, achar o resto de cada uma das seguintes divisões:

$$457. (a^2 + a - 1) \div (a - 1)$$

$$458. (a^2 + a - 1) \div (a - 1)$$

$$459. (a^2 + a - 1) \div (a - 1)$$

$$460. (x^2 - 1) \div (x + 1)$$

$$461. (a^2 + 2ax + x^2 - 1) \div (a + x + 1)$$

Decompõe em fatores as expressões seguintes:

$$462. a^2 + a$$

$$463. a^2 - a$$

$$464. a^2 - 2ab + b^2$$

$$465. a^2 - 2ab + b^2$$

$$466. a^2 - 2ab + b^2$$

$$467. a^2 - 2ab + b^2$$

$$468. a^2 - 2ab + b^2$$

$$469. a^2 - 2ab + b^2$$

$$470. a^2 - 2ab + b^2$$

$$471. a^2 - 2ab + b^2$$

$$472. a^2 + a^2$$

$$473. a^2 - 2ab + b^2$$

$$474. a^2 - 2ab + b^2$$

$$475. a^2 - 2ab + b^2$$

$$476. a^2 - 2ab + b^2$$

$$477. a^2 - 2ab + b^2$$

$$478. a^2 - 2ab + b^2$$

$$479. a^2 - 2ab + b^2$$

$$480. a^2 - 2ab + b^2$$

$$481. a^2 - 2ab + b^2$$

$$482. a^2 - 2ab + b^2$$

CAPÍTULO VII

1. Preliminares.

Definições. Fração algébrica ou razão é a divisão de duas quantidades algébricas quaisquer.

A expressão $\frac{a}{b}$ é uma fração ou razão.

Dois frações são equivalentes quando têm o mesmo valor numérico.

Uma proporção é a igualdade de duas frações equivalentes.

Por exemplo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção, se a e c são os termos da primeira razão e b e d são os termos da segunda razão.

Teorema. Uma fração algébrica não muda de valor multiplicando-se ou dividindo-se os dois termos por uma mesma quantidade.

1º Seja q o quociente de a por b , temos

$$q = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad bq = a$$

Se m é qualquer número, multiplicando-se os dois termos desta igualdade temos uma nova igualdade:

$$bmq = am$$

Então, dividindo cada membro por bm , vem:

2º Como m é arbitrário, podemos pôr $m = 1$.

Levando esse valor de m para a igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad \text{temos} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{b \times 1} = \frac{a}{b}$$

As duas igualdades :

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n}$$

demonstram o teorema

II Reduções de frações

1a. Reduções de frações. — Frações são todas as frações

são as principais

1. Simplificar frações

2. Reduzir frações ao mesmo denominador.

2a. Definição. — É igual a uma fração o seu valor

3a. Primeira regra. — Para simplificar uma fração dividindo

Por um número que simplificar a fração

$$\frac{144a^2b^2c^2}{(12a^2b^2c^2)}$$

Dividindo os dois termos desta fração pelo divisor

12a²b²c² resulta

$$\frac{144a^2b^2c^2}{12a^2b^2c^2} = \frac{12}{1}$$

3a. Simplificar a fração $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

Notas :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

4a. Segunda regra. — Reduzem-se várias frações ao mesmo

denominador multiplicando-se os dois termos de cada uma pelo produto dos denominadores de todas as outras.

Sejam as frações

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{m}{n}$$

Multiplicando os dois termos da primeira fração por dn , os dois termos da segunda por bn e os dois termos da terceira por bd , elas não mudam de valor e vêm a ser

$$\frac{adn}{bdn} \quad \frac{cnb}{bdn} \quad \frac{mbd}{bdn}$$

5a. Observação. — As frações $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$ são chamadas de

$$a + \frac{b}{b}$$

6a. 1a regra. — Para somar duas frações com o mesmo denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

2a. 2a regra. — Para somar duas frações com denominadores diferentes, reduz-se as frações ao mesmo denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

III Adição e subtração de frações

3a. Regra da adição. — Para somar várias frações, é preciso reduzir-nas ao mesmo denominador, fazer a soma dos numeradores e dar ao resultado o mesmo denominador

A soma das frações

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \quad \text{é com o denominador} \quad \frac{a+d+e}{b}$$

4a. 4a regra. — Para subtrair várias frações, reduz-se as frações ao mesmo denominador, faz-se a subtração dos numeradores e dá-se ao resultado o mesmo denominador

Aplicação. — Reduzir a soma das três frações

$$\frac{a}{2b} + \frac{c}{3b} + \frac{e}{6b}$$

1. A primeira fração representa a metade da unidade.

2. A segunda fração representa a terça parte da unidade.

Se, por estas frações, tirarmos o quociente de ambas, teremos uma igualdade, a qual se resolve facilmente para acharmos o valor de x .

$$\frac{3a^2}{5ab} : \frac{3a^2}{5ab^2} = \frac{2a}{5ab}$$

Assim sendo a regra, é

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

70. Regra da subtração. — Para subtrair duas frações a primeira reduz-se ao mesmo denominador, faz-se a diferença das numeradoras e dá-se pelo resultado o denominador comum.

A diferença das duas frações é

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

O que esta diferença deve encerrar a vezes menos a vezes no parte da subtração.

Aplicação. — Efetuemos a subtração seguinte:

$$\frac{2ab}{5b} - \frac{ab}{a+b}$$

Reduzindo as duas frações ao mesmo denominador, vem

$$\frac{2ab}{5b} = \frac{2a(b+a-b)}{5b(a+b)} = \frac{2a^2}{5b(a+b)}$$

IV. Multiplicação e divisão de frações

71. Regra da multiplicação. — Para se multiplicar duas frações faz-se o produto das numeradoras e o dos denominadores e indica-se a divisão do primeiro produto pelo segundo.

Seja a multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

Devemos ter:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Com efeito, observamos as duas igualdades,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{c}{d}$$

Destas igualdades tiramos,

$$bq = a \quad \text{e} \quad dq' = c,$$

cujo produto membro a membro dá a igualdade:

$$bq dq' = ac$$

Dividindo por bd ambos os membros iguais, vem:

$$qq' = \frac{ac}{bd}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Aplicação. — Efetuemos o produto seguinte:

$$\frac{3}{5} \times \frac{15a^2}{7b^2} \times \frac{11b^2}{9a^2}$$

O produto dos numeradores é

$$3 \times 15a^2 \times 11b^2 = 495a^2b^2,$$

e o dos denominadores,

$$5 \times 7b^2 \times 9a^2 = 315a^2b^2$$

O produto é pois:

$$\frac{495a^2b^2}{315a^2b^2} = \frac{11}{7}$$

72. Regra da divisão. — Obtemos o quociente de duas frações multiplicando-se a fração dividendo pela fração divisor inversa da.

Seja a divisão

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

Devemos ter

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

Com efeito, se observarmos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{c}{d},$$

teremos

$$bq = a \quad \text{e} \quad dq' = c$$

O quociente, membro a membro, destas duas igualdades, é.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ou, ainda:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

o que legitima a regra.

Atenção! Escrever a d e não a, quando

Segundo a regra precedente o quociente será

$$\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{3a^2 \cdot b^2 (a^2 - b^2)}{a^2 \cdot b^2} = \frac{3a^2}{b^2}$$

V Propriedades das proporções.

Teorema. — Em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Seja a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, devemos ter $ad = bc$.

Com efeito, se multiplicarmos por bd os dois membros desta proporção ela torna-se

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d} \text{ ou } ad = bc.$$

*1 Corolário. — 1.ª Dado o valor de uma proporção podemos permutar os termos entre si assim como os termos extremos.

Verifica-se, com efeito, que nas quatro proporções seguintes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

obtemos efectuando essas permutações, o produto dos meios e o produto dos extremos não se altera.

$$ad = bc$$

2.ª *Proporção continua* é aquela que tem iguais os meios ou extremos. Assim

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{ são proporções contínuas}$$

Numa proporção continua, cada um dos dois termos iguais chama-se *média proporcional* ou *média geométrica* dos dois outros termos. Nos exemplos acima x é a média geométrica ou média de a e de b .

1.ª *Proporção* de duas quantidades iguais a uma quadrado do produto dessas quantidades

Seja, na proporção

se fizermos o produto dos meios e o dos extremos, teremos:

$$x^2 = ab$$

Logo:

$$x = \sqrt{ab}$$

Teorema. — Em toda proporção a soma dos dois primeiros termos está para o 2.º termo assim como a soma dos dois últimos termos está para o 4.º termo.

A diferença dos dois primeiros termos está para o 2.º termo assim como a diferença dos dois últimos termos está para o 4.º termo.

Seja a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1)$$

Devemos ter:

$$1.ª \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

(Com efeito: 1.ª Acrescentando a unidade aos dois membros de (1), a igualdade vem a ser:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c}{b} + 1 \text{ ou } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (2)$$

2.ª Subtraindo a unidade dos dois membros de (1), esta igualdade vem a ser

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{b} - 1 \text{ ou } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (3)$$

Corolário. — Em toda proporção a soma dos dois primeiros termos e sua diferença dão a mesma razão que a soma e a diferença dos dois últimos.

Com efeito, nas proporções (2) e (3), trocando os meios de lugar temos,

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$$

Logo concluímos

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$$

Definindo, portanto, $q = \frac{b}{d}$, temos

$$\frac{a+b}{c+d} = q$$

76. Teorema. — Em toda proporção, a razão formada pela

uma das razões da proporção

e a razão formada pela diferença dos numeradores e a diferença dos denominadores iguala cada uma das razões da proporção.

Seja a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, e a dá:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Aplicando a esta proporção o teorema pr

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \quad \text{e} \quad \frac{a-c}{c-d} = \frac{b-d}{d}$$

ou, permutando os meios,

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

Corolário. — Em toda proporção, a soma dos numeradores e sua diferença dão a mesma razão que a soma dos denominadores e sua diferença.

Com efeito, igualando os dois valores da razão $\frac{c}{d}$, temos (Nº 76),

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

77. Teorema. — Uma série de razões iguais, a razão formada pela soma dos numeradores e a soma dos denominadores iguala cada uma das razões iguais.

Seja a serie de razões iguais

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots$$

teremos

$$\frac{a}{b} = \frac{a' + a'' + \dots}{b + b' + b'' + \dots}$$

Com efeito, se designarmos por q o valor comum de todas as razões iguais, teremos:

$$\frac{a}{b} = q = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots$$

Donde se tira:

$$bq = a, \quad b'q = a', \quad b''q = a'', \quad b'''q = a''', \quad \dots$$

Somando membro a membro todas estas igualdades vem:

$$q(b + b' + b'' + b''' + \dots) = a + a' + a'' + a''' + \dots$$

donde

$$q = \frac{a + a' + a'' + a''' + \dots}{b + b' + b'' + b''' + \dots}$$

e enfim

$$\frac{a}{b} = \frac{a + a' + a'' + a''' + \dots}{b + b' + b'' + b''' + \dots}$$

Corolário. — Uma série de razões iguais a razão formada pela soma dos numeradores e a soma dos denominadores, iguala cada uma das razões iguais.

Com efeito, somando membro a membro as igualdades depois de elevá-las ao quadrado temos:

$$b^2q^2 + b'^2q^2 + b''^2q^2 + b'''^2q^2 + \dots = a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \dots$$

Donde se deduz

$$q^2 = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \dots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \dots}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \dots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \dots}}$$

EXERCÍCIOS SOBRE AS FRAÇÕES E AS PROPORÇÕES

Simplificar as frações:

497

498

499

500

501. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 502. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 503. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 504. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 505. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 506. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 507. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 508. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 509. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 510. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 511. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 512. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 513. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 514. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 515. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
516. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 517. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 518. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 519. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 520. $\frac{10a^4 - 81}{5a^2 - 9}$
 521. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 522. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 523. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 524. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 525. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 526. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 527. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 528. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 529. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
 530. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

Reduz ao mesmo denominador as frações seguintes

531. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 532. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 533. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 534. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 535. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
536. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 537. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 538. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 539. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 540. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

541. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 542. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}$
 543. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 544. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
545. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 546. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 547. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
 548. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

Reduza as expressões seguintes a uma só expressão fracionária

549. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 550. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 551. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 552. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 553. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 554. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 555. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 556. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 557. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 558. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 559. $\frac{(x-y)^2}{x^2} - \frac{(x+y)^2}{y^2}$
 560. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 561. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 562. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 563. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 564. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 565. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
566. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 567. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 568. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 569. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 570. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 571. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 572. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 573. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 574. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 575. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 576. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 577. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 578. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 579. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 580. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 581. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$
 582. $\frac{a}{b} + \frac{2a^2}{c}$

Efetuar as operações indicadas e reduzir.

- 583 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 605 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 584 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 606 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 585 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 607 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 586 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 608 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 587 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 609 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 588 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 610 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 589 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 611 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 590 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 612 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 591 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 613 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 592 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 614 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 593 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 615 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 594 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 616 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 595 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 617 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 596 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 618 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 597 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 619 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 598 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 620 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 599 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 621 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 600 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 622 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 601 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 623 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 602 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 624 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 603 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 625 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 604 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 626 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

Calcular o termo desconhecido de cada uma das proporções seguintes.

- 627 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 630 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 628 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 631 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 629 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 632 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 633 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 636 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 634 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 637 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
- 635 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ 638 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

SEGUNDA PARTE

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRÁU

CAPÍTULO PRIMEIRO

RELAÇÕES DO PRIMEIRO GRÁU A UMA INCOGNITA

I. Definições.

78. Igualdade. — *Igualdade* é a expressão de duas quantidades iguais, ou de dois valores numéricos.

Exemplo: $10 = 2 + 8$ é uma igualdade aritmética, porque os dois membros são iguais.

$$10 = 2 + 8$$

Identidade é a expressão de duas quantidades iguais, ou de dois valores numéricos, que são iguais por natureza, ou por definição.

Assim a expressão:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

é uma identidade, porque os dois membros são iguais por natureza, ou por definição.

$$10 - 1^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 1 + 1^2 = 100 - 20 + 1 = 81$$

DEFINIÇÕES

75

79. Equação. *Equação* é uma igualdade que existe só para um ou mais valores de valores atribuídos às letras.

Exemplo: $x + 7 = 0$ é uma equação.

$$5x - 7 = 0 \quad x = 1$$

Uma equação porque seus dois membros não se tornam iguais para $x = 2$.

Exemplo: $x + 7 = 0$ é uma equação porque seus membros não se tornam iguais para $x = 2$.

Na equação

$$11x - 9 = \frac{2}{3} \cdot 9$$

coeficientes são os valores conhecidos 11, -9, $\frac{2}{3}$ e 6; a incógnita é x .

A solução da equação é o valor de x que transforma a equação em uma identidade.

81. Raízes de uma equação. *Raízes* de uma equação são os valores de x que transformam a equação em uma identidade.

A equação

$$x + 1 = 11x$$

tem a raiz 3, porque substituindo x por 3, a equação transforma-se em uma identidade.

$$3 + 1 = 11 \times 3, \text{ ou } 33 = 33$$

Resolver uma equação é achar-lhe as raízes.

Gráu de uma equação é a soma dos expoentes das incógnitas no termo em que essa soma é maior.

Os graus das equações seguintes:

$$ax + b = c$$

$$3x^2 - 2x = 1$$

$$3x^2y^2 - y^2 + x - 1 = 0$$

são respectivamente 1, 2 e 6.

82. Função de x . Quando uma quantidade, y por exemplo, depende de x , ou de x por exemplo, diz-se que y é função de x .

Assim as expressões

$$y = 2x + 7, \quad x = 0, \quad y = 4x^2 - 5x + 6.$$

y é função de x .

Diz-se que x é a *variável independente* e y , a *variável dependente*.

II. Princípios sobre as equações.

83 Princípios gerais. A resolução das equações baseia-se nos dois princípios seguintes, geralmente aceites como axiomas.

1.º Uma equação conserva as mesmas raízes juntando-se ou tirando-se uma mesma quantidade aos dois membros.

$$ax + b = cx + d \quad \text{adicionando } -cx \text{ a ambos os membros}$$

$$ax + b - cx = cx + d - cx$$

$$(a - c)x + b = d$$

Resultado da subtracção regida anteriormente.

84. Regra para a transposição dos termos. *Numa equação, para passar um termo de um membro para o outro, é preciso suprimi-lo no membro onde está, e escrevê-lo no outro com o sinal contrário.*

Seja a equação

$$5x - 3 = 2x + 12$$

Para passar para o segundo membro o termo -3 , acrescenta-se $+3$ aos dois membros da equação, e a equação vem a ser

$$5x - 3 + 3 = 2x + 12 + 3.$$

e, depois da simplificação

$$5x = 2x + 15$$

Para passar para o primeiro membro o termo $2x$, basta acrescentar $-2x$ aos dois membros da equação, e a equação vem a ser

$$5x - 2x = 2x + 15 - 2x.$$

e depois da redução:

$$3x = 15$$

Este resultado confirma a regra enunciada.

Regra - Para expir os denominadores de uma equação, multiplicar cada termo pelo produto de todos os denominadores.

Exemplo - 1.º Seja esta a equação

$$\frac{3x}{5} + \frac{4}{x} = 5$$

Para aplicar a regra, multiplicamos cada termo pelo produto $5x$ dos denominadores; a equação vem a ser

$$\frac{3x}{5} \times 5x + \frac{4}{x} \times 5x = 5 \times 5x$$

a ainda:

$$3x \times x + 4 \times 5 = 100 \times x$$

2.º Eliminar os denominadores da equação

$$3x^2 + 20 = 100x$$

multiplicamos todos os termos pelo produto $3ab$ dos denominadores, teremos:

$$\frac{3abx}{3} + \frac{3ab}{b} = \frac{3abx}{a} + \frac{3ab}{a}$$

que vem a ser, depois da simplificação:

$$ax + ab = bx + ab$$

Observação. Podem-se mudar os sinais de todos os termos de uma equação por equivalente a não aplicar os dois membros por

III. Resolução das equações do primeiro grau a uma incógnita

Regra - Para resolver uma equação do primeiro grau a uma incógnita, é preciso:

- 1.º Eliminar os denominadores e as parênteses, se houver
- 2.º Passar para o primeiro membro os termos desconhecidos, e para o segundo membro os termos conhecidos;
- 3.º Reduzir os termos conhecidos e pôr em factor a incógnita;
- 4.º Dividir os dois membros pelo coeficiente da incógnita.

Aplicações. — 1.º Resolver a equação

$$2x - 2x = 25.$$

Passando de um para o outro membro, temos -7 para o segundo membro

$$2x - 2x = 25$$

Para de redução, esta equação vem a ser:

... os dois membros por 2, obtém-se:

$$x = 1$$

Este valor de x é a raiz da equação dada.

2.º Achar a raiz da equação

Expondo os denominadores, esta equação vem a ser (87)

$$2x - 4x = -3024$$

Passando o termo $4x$ para o primeiro membro, e reduzindo, temos sucessivamente

$$\begin{aligned} 2x - 4x &= -3024 \\ -2x &= -3024 \end{aligned}$$

Enfim, depois de mudar os sinais dos dois membros e dividir por 2, vem os

$$\begin{aligned} 2x &= 3024 \\ x &= 1512 \end{aligned}$$

A raiz procurada é 1512.

3.º Resolver a equação literal

$$ax - \frac{1}{c} = bx$$

Expondo os denominadores, esta equação vem

$$acx - a^2 = bcx - c^2$$

Transpondo os termos desta nova equação, temos

Da

$$ax - \frac{1}{c} = bx$$

Dando tiramos

$$\begin{aligned} ax - \frac{1}{c} &= bx \\ ax - bx &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

EQUAÇÕES A RESOLVER

080		089	
081	$50 - 15 = 0$	090	
082	$5x = 10$	091	
083	$4x = 12$	092	
084	$3x = 9$	093	
085	$2x = 6$	094	
086	$x = 3$	095	
087	$5x = 10$	096	
088	$3x = 6$	097	
089	$2x = 4$	098	
090	$x = 2$	099	
091	$4x = 8$	100	
092	$3x = 6$	101	
093	$2x = 4$	102	
094	$x = 2$	103	
095	$5x = 10$	104	
096	$3x = 6$	105	
097	$2x = 4$	106	
098	$x = 2$	107	
099	$4x = 8$	108	
100	$3x = 6$	109	
101	$2x = 4$	110	
102	$x = 2$	111	
103	$5x = 10$	112	
104	$3x = 6$	113	
105	$2x = 4$	114	
106	$x = 2$	115	
107	$4x = 8$	116	
108	$3x = 6$	117	
109	$2x = 4$	118	
110	$x = 2$	119	
111	$5x = 10$	120	
112	$3x = 6$	121	
113	$2x = 4$	122	
114	$x = 2$	123	
115	$4x = 8$	124	
116	$3x = 6$	125	
117	$2x = 4$	126	
118	$x = 2$	127	
119	$5x = 10$	128	
120	$3x = 6$	129	
121	$2x = 4$	130	
122	$x = 2$	131	
123	$4x = 8$	132	
124	$3x = 6$	133	
125	$2x = 4$	134	
126	$x = 2$	135	
127	$5x = 10$	136	
128	$3x = 6$	137	
129	$2x = 4$	138	
130	$x = 2$	139	
131	$4x = 8$	140	
132	$3x = 6$	141	
133	$2x = 4$	142	
134	$x = 2$	143	
135	$5x = 10$	144	
136	$3x = 6$	145	
137	$2x = 4$	146	
138	$x = 2$	147	
139	$4x = 8$	148	
140	$3x = 6$	149	
141	$2x = 4$	150	
142	$x = 2$	151	
143	$5x = 10$	152	
144	$3x = 6$	153	
145	$2x = 4$	154	
146	$x = 2$	155	
147	$4x = 8$	156	
148	$3x = 6$	157	
149	$2x = 4$	158	
150	$x = 2$	159	
151	$5x = 10$	160	
152	$3x = 6$	161	
153	$2x = 4$	162	
154	$x = 2$	163	
155	$4x = 8$	164	
156	$3x = 6$	165	
157	$2x = 4$	166	
158	$x = 2$	167	
159	$5x = 10$	168	
160	$3x = 6$	169	
161	$2x = 4$	170	
162	$x = 2$	171	
163	$4x = 8$	172	
164	$3x = 6$	173	
165	$2x = 4$	174	
166	$x = 2$	175	
167	$5x = 10$	176	
168	$3x = 6$	177	
169	$2x = 4$	178	
170	$x = 2$	179	
171	$4x = 8$	180	
172	$3x = 6$	181	
173	$2x = 4$	182	
174	$x = 2$	183	
175	$5x = 10$	184	
176	$3x = 6$	185	
177	$2x = 4$	186	
178	$x = 2$	187	
179	$4x = 8$	188	
180	$3x = 6$	189	
181	$2x = 4$	190	
182	$x = 2$	191	
183	$5x = 10$	192	
184	$3x = 6$	193	
185	$2x = 4$	194	
186	$x = 2$	195	
187	$4x = 8$	196	
188	$3x = 6$	197	
189	$2x = 4$	198	
190	$x = 2$	199	
191	$5x = 10$	200	
192	$3x = 6$	201	
193	$2x = 4$	202	
194	$x = 2$	203	
195	$4x = 8$	204	
196	$3x = 6$	205	
197	$2x = 4$	206	
198	$x = 2$	207	
199	$5x = 10$	208	
200	$3x = 6$	209	
201	$2x = 4$	210	
202	$x = 2$	211	
203	$4x = 8$	212	
204	$3x = 6$	213	
205	$2x = 4$	214	
206	$x = 2$	215	
207	$5x = 10$	216	
208	$3x = 6$	217	
209	$2x = 4$	218	
210	$x = 2$	219	
211	$4x = 8$	220	
212	$3x = 6$	221	
213	$2x = 4$	222	
214	$x = 2$	223	
215	$5x = 10$	224	
216	$3x = 6$	225	
217	$2x = 4$	226	
218	$x = 2$	227	
219	$4x = 8$	228	
220	$3x = 6$	229	
221	$2x = 4$	230	
222	$x = 2$	231	
223	$5x = 10$	232	
224	$3x = 6$	233	
225	$2x = 4$	234	
226	$x = 2$	235	
227	$4x = 8$	236	
228	$3x = 6$	237	
229	$2x = 4$	238	
230	$x = 2$	239	
231	$5x = 10$	240	
232	$3x = 6$	241	
233	$2x = 4$	242	
234	$x = 2$	243	
235	$4x = 8$	244	
236	$3x = 6$	245	
237	$2x = 4$	246	
238	$x = 2$	247	
239	$5x = 10$	248	
240	$3x = 6$	249	
241	$2x = 4$	250	
242	$x = 2$	251	
243	$4x = 8$	252	
244	$3x = 6$	253	
245	$2x = 4$	254	
246	$x = 2$	255	
247	$5x = 10$	256	
248	$3x = 6$	257	
249	$2x = 4$	258	
250	$x = 2$	259	
251	$4x = 8$	260	
252	$3x = 6$	261	
253	$2x = 4$	262	
254	$x = 2$	263	
255	$5x = 10$	264	
256	$3x = 6$	265	
257	$2x = 4$	266	
258	$x = 2$	267	
259	$4x = 8$	268	
260	$3x = 6$	269	
261	$2x = 4$	270	
262	$x = 2$	271	
263	$5x = 10$	272	
264	$3x = 6$	273	
265	$2x = 4$	274	
266	$x = 2$	275	
267	$4x = 8$	276	
268	$3x = 6$	277	
269	$2x = 4$	278	
270	$x = 2$	279	
271	$5x = 10$	280	
272	$3x = 6$	281	
273	$2x = 4$	282	
274	$x = 2$	283	
275	$4x = 8$	284	
276	$3x = 6$	285	
277	$2x = 4$	286	
278	$x = 2$	287	
279	$5x = 10$	288	
280	$3x = 6$	289	
281	$2x = 4$	290	
282	$x = 2$	291	
283	$4x = 8$	292	
284	$3x = 6$	293	
285	$2x = 4$	294	
286	$x = 2$	295	
287	$5x = 10$	296	
288	$3x = 6$	297	
289	$2x = 4$	298	
290	$x = 2$	299	
291	$4x = 8$	300	
292	$3x = 6$	301	
293	$2x = 4$	302	
294	$x = 2$	303	
295	$5x = 10$	304	
296	$3x = 6$	305	
297	$2x = 4$	306	
298	$x = 2$	307	
299	$4x = 8$	308	
300	$3x = 6$	309	
301	$2x = 4$	310	
302	$x = 2$	311	
303	$5x = 10$	312	
304	$3x = 6$	313	
305	$2x = 4$	314	
306	$x = 2$	315	
307	$4x = 8$	316	
308	$3x = 6$	317	
309	$2x = 4$	318	
310	$x = 2$	319	
311	$5x = 10$	320	
312	$3x = 6$	321	
313	$2x = 4$	322	
314	$x = 2$	323	
315	$4x = 8$	324	
316	$3x = 6$	325	
317	$2x = 4$	326	
318	$x = 2$	327	
319	$5x = 10$	328	
320	$3x = 6$	329	
321	$2x = 4$	330	
322	$x = 2$	331	
323	$4x = 8$	332	
324	$3x = 6$	333	
325	$2x = 4$	334	
326	$x = 2$	335	
327	$5x = 10$	336	
328	$3x = 6$	337	
329	$2x = 4$	338	
330	$x = 2$	339	
331	$4x = 8$	340	
332	$3x = 6$	341	
333	$2x = 4$	342	
334	$x = 2$	343	
335	$5x = 10$	344	
336	$3x = 6$	345	
337	$2x = 4$	346	
338	$x = 2$	347	
339	$4x = 8$	348	
340	$3x = 6$	349	
341	$2x = 4$	350	
342	$x = 2$	351	
343	$5x = 10$	352	
344	$3x = 6$	353	
345	$2x = 4$	354	
346	$x = 2$	355	
347	$4x = 8$	356	
348	$3x = 6$	357	
349	$2x = 4$	358	
350	$x = 2$	359	
351	$5x = 10$	360	
352	$3x = 6$	361	
353	$2x = 4$	362	
354	$x = 2$	363	
355	$4x = 8$	364	
356	$3x = 6$	365	
357	$2x = 4$	366	
358	$x = 2$	367	
359	$5x = 10$	368	
360	$3x = 6$	369	
361	$2x = 4$	370	
362	$x = 2$	371	
363	$4x = 8$	372	

700. $722. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
701. $723. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
702. $724. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
703. $\frac{x}{9} + \frac{x}{7} = 10$
704. $725. \frac{9x}{2} = 10 + \frac{x}{4}$
705. $726. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
706. $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 6$
707. $727. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
708. $728. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
709. $729. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
710. $730. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
711. $731. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
712. $732. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
713. $733. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
714. $734. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
715. $735. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
716. $736. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
717. $737. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
718. $738. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
719. $739. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
720. $740. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
721. $741. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$

742. $754. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
743. $755. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
744. $756. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
745. $757. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
746. $758. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
747. $759. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
748. $760. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
749. $761. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
750. $762. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
751. $763. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
752. $764. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
753. $765. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
754. $766. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
755. $767. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
756. $768. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
757. $769. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
758. $770. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
759. $771. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
760. $772. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
761. $773. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
762. $774. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
763. $775. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
764. $776. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
765. $777. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
766. $778. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
767. $779. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
768. $780. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
769. $781. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
770. $782. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
771. $783. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
772. $784. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
773. $785. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
774. $786. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
775. $787. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
776. $788. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
777. $789. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
778. $790. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
779. $791. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
780. $792. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
781. $793. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
782. $794. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
783. $795. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
784. $796. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
785. $797. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
786. $798. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
787. $799. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
788. $800. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
789. $801. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
790. $802. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
791. $803. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
792. $804. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
793. $805. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
794. $806. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
795. $807. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
796. $808. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
797. $809. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
798. $810. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
799. $811. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$
800. $812. 0 = x - 872 + \frac{9x}{100}$

CAPÍTULO II

PRIMEIRO DO PRIMEIRO GRAU A UMA ÚNICA

I. Pôr os problemas em equação

88. Definição. — Pôr um problema em equação é exprimir o modo de situar algébricos as relações que o caracteriza.

Regra para pôr em equação. — Para pôr um problema em equação, representa-se por uma letra cada uma das quantidades que se conhece e se procura, e se escrevem as equações todas as operações necessárias para verificar a exatidão da resposta, se fôsse conhecida.

Alguns exemplos mostrarão o modo de aplicar esta regra.

II. Resolução de alguns problemas.

89. Problema I. — Qual é o número que aumentado de 20, torna o triplo do que era antes?

Seja x este número. A x acrescentado 20, os seus três vezes o número procurado em 3 x . Donde a equação do problema

$$x + 20 = 3x$$

Resolvendo esta equação (87), vem:

$$x = 10$$

O número procurado é 10.

90. Problema II. — Como pagar a quantia de 118\$ com 35 notas, umas de 5\$ e outras de 2\$?

Seja x o número das notas de 5\$, e o número das notas de 2\$ será 35 - x .

As x notas de 5\$ valem 5 x , e as 35 - x notas de 2\$ valem 35 - x 2\$. Podemos escrever a equação

$$5x + 35 - x)2 = 118,$$

ouja rais é nº 87)

$$x = 10$$

É preciso dar 10 notas de 5\$ e 15 — 10 ou 10 notas de 2\$.

91. Problema III. — Uma pessoa gastou o dobro, os dois quintos e o quarto do seu haver, mais 25\$. Depois, não lhe ficou nada. Quanto tinha primeiramente?

Seja x o haver dessa pessoa. Já gastou

$$\frac{x}{10} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{4} + 25\$$$

Como gastou tudo seu haver é exata mente a soma de suas despesas; a equação do problema é

$$x = \frac{x}{10} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{4} + 25.$$

Resolvendo esta equação vem nº 87

$$x = 100$$

Esta pessoa possuía 100\$.

92. Problema IV. — Um pai tem 45 anos e seu filho 15. Daqui a quantos anos a idade do pai será dupla da idade do filho?

Seja x o número dos anos que não de ocorrer até que a idade do pai seja o dobro da idade do filho. Quando o pai tiver esta idade ele terá 40 + x anos e o filho 15 + x anos.

Podemos escrever

$$40 + x = 2(15 + x).$$

É a equação do problema; dá: $x = 10$.

É fácil verificar que, daqui a 10 anos, a idade do pai será o dobro da idade do filho.

93. Problema V. — Um trem sai do Rio de Janeiro para São Paulo com uma velocidade de 45 km por hora. Uma hora depois, outro trem sai do Rio de Janeiro com uma velocidade de 60 km por hora. Depois de quantas horas e a que distância do Rio se dará o encontro?

Seja x a distância percorrida pelo primeiro trem, e o segundo, $50x$ km, e o primeiro, $45x$ km.

O segundo trem percorrerá os 45 km de adiantamento do primeiro, mais $45x$ km. De sorte que temos:

$$50x = 45 + 45x.$$

Donde se tira $x = 9$.

O segundo trem percorrerá $50 \times 9 = 450$ km, e o primeiro, $45 \times 9 = 405$ km, em 2 horas de caminho.

94. Problema VI — Um negociante empresta dois capitais a juros simples. O primeiro rende 4% por ano e o segundo, que excede o primeiro de 4.000\$, rende 5%. Achar estes dois capitais sabendo que, depois de um ano, juntos nos juros, valem reunidos 20.920\$.

Seja x o primeiro capital, os juros anuais serão:

$$\frac{x \cdot 4}{100}$$

O segundo capital será $x + 4.000$ e os seus juros anuais serão:

$$\frac{(x + 4000) \cdot 5}{100}$$

A soma dos dois capitais, ou $x + (x + 4000)$, acrescida dos juros, deve ser igual a 20.920\$.

Temos a equação

$$x + (x + 4000) + \frac{x \cdot 4}{100} + \frac{(x + 4000) \cdot 5}{100} = 20.920$$

A resolução dessa equação dá $x = 8.000$ \$. O primeiro capital é 8.000\$ e o segundo,

$$8.000 + 4.000 = 12.000\$$$

95. Problema VII — Um pai distribui certa quantia a seus filhos. Ao primeiro dá 25% e 1/4 do resto; ao segundo dá 25% e 1/4 do resto; ao terceiro dá 25% e 1/4 do resto, e assim por diante. Sabendo que todas as filhas receberam a mesma quantia, pede-se: 1.º a quantia repartida, 2.º a parte de cada uma, 3.º o número dos filhos.

Seja x a quantia repartida. A parte do primeiro será:

$$x + \frac{1}{n} (x - a) \quad \text{ou} \quad \frac{na + x - a}{n}$$

A do segundo será

$$\frac{x}{n} + \frac{1}{n} (x - a)$$

A do terceiro será $\frac{x}{n} + \frac{1}{n} (x - a)$, e assim por diante.

As partes são iguais, logo

$$2x + \frac{1}{n} (x - a) = \frac{x}{n} + \frac{1}{n} (x - a) + 2a$$

ou, reduzindo tudo ao mesmo denominador,

$$2nx + x - a = x + x - a + 2an$$

E igualando entre si as partes dos dois primeiros filhos, temos a equação:

$$2x + \frac{1}{n} (x - a) = \frac{x}{n} + \frac{1}{n} (x - a) + 2a$$

Resolvendo esta equação, obtemos:

$$x = an^2 - 2na + a = a(n^2 - 2n + 1) = a(n - 1)^2.$$

A quantia repartida é pois $a(n - 1)^2$.

A parte de cada um é

$$\frac{na - a + x}{n} = \frac{na - a + a(n - 1)^2}{n} = a(n - 1).$$

O número dos filhos é igual ao número das partes, ou a .

$$\frac{a(n - 1)^2}{a(n - 1)} = n - 1.$$

RESOLVER OS SEGUINTE PROBLEMAS

783. O terço e a metade de um número somados juntos 860; qual é esse número?

784. Qual é o número cujo 1/25 aumentada de 500, dá 1000 para o dobro?

785. Qual é o número cujo 1/3 junto ao 1/4, faz 35?

786. Qual é o número cujo 1/5 junto ao 1/6, faz 35?

787 As 5.6 a peça de um prelo custa 200 réis de 100 réis

788 Achar o número x e y se $x + y = 13$ e $x - y = 5$

789 Qual é o número x e y se $x + y = 13$ e $x - y = 5$

790 Achar a idade de um homem que gastou 13.500 réis

791 Qual é o número que se escreve com 1 e 3

792 Qual é o número que se escreve com 1 e 3

793 Qual é o número que se escreve com 1 e 3

794 Qual é o número que se escreve com 1 e 3

795

796 Três pessoas compram um terreno de 100 metros de comprimento e 50 metros de largura. Cada uma delas quer pagar 1/3 do preço. Quanto cada uma deve pagar?

797 Um homem tem 200 réis e quer comprar 100 ovos. Cada ovo custa 2 réis. Quanto ele deve pagar?

798 Um homem tem 200 réis e quer comprar 100 ovos. Cada ovo custa 2 réis. Quanto ele deve pagar?

799 Qual é o número que se escreve com 1 e 3

800

801

802 Um homem tem 200 réis e quer comprar 100 ovos. Cada ovo custa 2 réis. Quanto ele deve pagar?

803 Um homem tem 200 réis e quer comprar 100 ovos. Cada ovo custa 2 réis. Quanto ele deve pagar?

804

805

806 Um homem tem 200 réis e quer comprar 100 ovos. Cada ovo custa 2 réis. Quanto ele deve pagar?

807 Um fazendeiro vendeu 1/3 da sua colheita de café. Depois de 4 dias do resto. Quantas sacas de café colheu se ficou ainda com 100 sacas?

808 Faltam-me 25 para comprar uma caixa de compassos. Quanto tenho?

809 Achar o número de alunos de uma aula se 1/3 dos está lendo e escrevendo e os 20 restantes fazendo contas.

810 Um negociante comprou 42 met. de tecido por 8400. Por quanto deve vender o metro para lucrar 1/9 do preço de venda?

811 A soma de dois números é 22 e a diferença é 17. Qual é o maior e qual é o menor?

812 A diferença de 3 números é 165, o maior é 1/3 do resto do menor é 1/3 do resto do maior é 1/3 do resto do menor.

813 Um jardineiro deixa a um amigo 1/2 dos pêssegos que colheu e dá o 1/3 do resto a outro e chega em casa com 6 pêssegos. Quantos colheu?

814 Um pai comprou 24 ovos e outros 100 cordeiros, e o cordeiro vale 85 metros do que uma ovelha. Quanto o pai pagou ao todo?

815 Um carteiro diz: "Se eu tivesse distribuído o terço, o quarto e os 2/5 do dobro das cartas que recebi no correio mais 50 cartas, eu teria distribuído 540." Quantas cartas distribuiu o carteiro?

816 Um homem recebeu 2400\$ por um cavalo e um jumento. O jumento vale 1/3 do cavalo. Qual é o preço de cada animal?

817 Um pai tem 5 vezes a idade do filho e do pai e do filho não tem mais de 3 vezes a idade. Quantos anos tem cada um?

818 Repartir 540 partes iguais entre 9 e 4

819 Revelando o que me é devido pagaria 1/3 do que me é devido. Quanto me é devido se estas duas quantias juntas fazem 2000\$?

820 Vendendo certo número de peças de 1/2 a 1\$500 o metro, um negociante lucraria 90\$. Vendendo-as a 1\$600 lucraria 245\$. Quantas peças tem?

821 Cada ano um negociante aumenta sua fortuna 1/3 do que tinha no ano anterior. No fim do segundo ano, depois de retirar 1/3 para sua despesa e 1/4 para os filhos, tem a fortuna duplicada. Quanto tinha no primeiro ano?

822 Uma quantia de 8600\$ é formada de notas de 100 e de 50. O número das notas de 100 é para o das de 50 como 35 para 53. Quantas notas há de cada espécie?

823 João comprou 14.50 de uma peça de estuira a 12\$ o metro vendendo-as a 13\$ lucra 170\$. Quantos metros comprou, qual é o comprimento da peça e qual é o preço de compra?

824 Cheio de água pura, um vaso pesa 14 kg. Tendo-se esvaziado a 1/2, não pesa mais que 5 kg. Achar o peso do vaso e a quantidade de água que encerra?

824. Dois pastores compararam-se. Um disse: "Se não pôde dar-se a metade do meu rebanho, e eu lhe dou a metade do seu, então os dois teremos juntos 350 ovelhas".

825. Se um homem tem 2000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

826. Achar dois números cujas somas sejam 10 e 15, e cuja diferença seja 5.

827. Um homem vende a uma primeira pessoa a 1/2 de suas granelas, e a uma segunda pessoa a 1/3 de suas granelas, e assim por diante, até que ele tenha vendido todas as granelas.

828. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

829. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

830. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

831. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

832. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

833. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

834. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

835. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

836. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

837. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

838. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

839. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

840. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

841. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

842. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

843. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

844. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

845. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

846. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

847. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

848. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

849. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

850. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

851. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

852. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

853. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

854. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

855. Um homem tem 1000 réis e quer comprar um animal, e se ele tiver 1000 réis a mais, ele poderá comprar 2 animais. Quantos animais ele pode comprar com os 2000 réis?

PROBLEMAS LITERÁRIOS

856. Repartir um número em duas partes tais que a primeira seja 1/2 mais a segunda, e a segunda seja 1/3 mais a primeira.

857. Achar dois números consecutivos cuja diferença dos quadrados seja 1.

858. Que horas são, se o que resta do dia vale 1/2 mais o que já passou?

859. Achar um número cujo terço seja a metade, façam 100.

862. Achar um número que, acrescentado a si ou a 2x, de 2 números que estejam entre si como 2 está para 3.

863. Achar um número que exceda 2a de outro tanto como 3a exceda a 0 das 2 primeiras.

864. Qual é o número que iguala m vezes sua raíz quadrada?

865. Que número se deve acrescentar a cada termo da fração $\frac{a}{b}$ para se obter $\frac{c}{d}$?

866. Leio pa tem a vez a idade do filho, e a soma de suas idades é o m. Qual a idade das duas crianças?

867. A idade de um homem é a e a de filho é b. Tanto a quanto o filho a idade da mãe vale m vezes a idade do filho.

868. Um artigo custa x por quanto se deve vender para se obter o lucro sobre o preço de venda?

869. Achar uma proporção cujos termos sejam os inferiores de uma mesma quantidade aos que se conhecem.

870.

871. Que número se deve acrescentar aos dois termos da fração $\frac{a}{b}$ para que venha a igualar $\frac{c}{d}$?

872. Haviam de votar 3 pessoas. Tres candidatos e o primeiro teve m votos mais do que o segundo, e o mais do que o 3º. Quantos votos obteve cada um e as abstenções?

873. Um artigo custa x e se vende por y. Qual o lucro sobre o preço de venda?

874. Um tanque pode encher um tanque em x horas. Se se encher com dois tanques, que tempo levará para encher?

875. Dois correios têm por velocidade x e y. Qual o tempo para se encontrarem?

876. Um artigo custa x e se vende por y. Qual o lucro sobre o preço de venda?

877. Um artigo custa x e se vende por y. Qual o lucro sobre o preço de venda?

PROBLEMAS DE GEOMETRIA

878. Os ângulos de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão 10°. Achar os 3 ângulos.

879. Achar os ângulos de um polígono, se o número de lados é m e a soma dos ângulos é n.

880. Num círculo de raio r, um arco de 60° subtende um segmento. Achar o comprimento do segmento.

881. Dividir uma reta de 10 m. em partes proporcionais a 3, 4, 5.

882. Um círculo de raio r tem um ângulo central de 60°. Achar o comprimento do arco e a área do setor.

883. Num triângulo dado, inscrever um retângulo que tenha a diagonal de diferença entre as duas mediatrizes.

884. A soma dos ângulos de um polígono é 28 retos. Quantos lados tem o polígono?

885. Os lados AB, BC, AC de um triângulo valem respectivamente 3, 4, 5. Pelo ponto D traça-se uma paralela DE ao lado AC e uma paralela DF ao lado AB. Achar os lados DE, DF e a área do retângulo DEBF.

886. Um polígono regular tem 10 lados. Achar a soma dos ângulos internos.

887. Um triângulo tem lados 3, 4, 5. Achar a altura relativa ao lado 5 e a área.

888. Um triângulo tem lados 3, 4, 5. Achar o raio do círculo inscrito e a área.

889. Um trapézio tem bases 3 e 5 e altura 4. Achar a área e o comprimento da mediana.

890. Os lados de um triângulo são 30, 40, 50 m. Calcular a altura relativa ao lado 50 e a área.

891. No mesmo triângulo calcular o raio do círculo circunscrito e a área dos círculos ex-inscritos.

892. Num círculo de superfície πr^2 , calcular os dois raios se um é 1 m de diferença.

CAPÍTULO III

QUESTÕES DO PRIMEIRO GRAU A VÁRIAS INCÓGNITAS

I. Definições

26. Equações equivalentes. — Equações equivalentes são

As que as duas equações

$$\frac{x}{4} - 15 = \frac{x}{10} \quad \text{e} \quad \frac{2x}{5} = 2x - 20.$$

são equivalentes porque têm a mesma raiz, $x=100$.

Sistema de equações simultâneas

duas equações simultâneas. Por exemplo, as

formam um sistema de equações simultâneas

$$x=10 \quad y=12 \quad \text{e} \quad z=14$$

Resolução do sistema

O conjunto das raízes chama-se solução do sistema.

Eliminação de uma incógnita. — Eliminar uma incógnita

significa a mesma. Os principais métodos de eliminação

1.º Por substituição,

2.º Por comparação ou igualação,

3.º Por adição

Pelo método de Bezout ou dos coeficientes indeterminados.

II. Eliminação por substituição

28. Regra. — Para se resolver um sistema de equações pelo método de substituição, procede-se do modo seguinte:

1.º De uma das equações dadas, tira-se o valor de uma incógnita em função das outras, leva-se este valor em todas as outras equações do sistema, vem um novo sistema com uma incógnita e uma equação a menos.

2.º De uma das equações deste novo sistema, tira-se o valor de uma das incógnitas e leva-se este valor em todas as outras equações, vem um terceiro sistema com duas incógnitas e duas equações a menos do que o primeiro.

3.º Continua-se do mesmo modo até ficar uma só equação e uma incógnita, que se resolve (n.º 27).

4.º Tendo as duas equações do sistema precedente, tira-se o valor desta incógnita e obtém-se o valor de uma nova incógnita. Tendo as três equações do penúltimo sistema, tira-se o valor de uma incógnita e determina-se o valor de uma terceira incógnita. Retornando-se assim ao sistema dado, e obtém-se a solução deste sistema.

Aplicação. — Resolver o sistema

Resolvendo-se a primeira equação em relação a x , ou considerando-se y como uma quantidade conhecida obtém-se

$$x = 22 - 3y, \quad (1)$$

Levando-se este valor para a segunda equação do sistema dado, ela vem a ser:

$$4(22 - 3y) - y = 50 \quad \text{ou} \quad 13y = 312.$$

Esta última equação dá $y=24$.Levando-se este valor de y para a equação (1), vem

$$x = 22 - 3 \cdot 24$$

A solução do sistema dado é $x=20$, $y=24$.

Regra. — Para se resolver por substituição um sistema de 3 equações e 3 incógnitas

1.º Tira-se o valor de x da 1.ª equação e leva-se este valor na 2.ª equação, vem uma equação a uma só incógnita y que se resolve.2.º Leva-se o valor de y na equação que dá x e vem o valor de x .

Aplicação. Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Os valores de x tirados deste sistema são :

$$x = 8 - 2y = 3z$$

$$x = \frac{-1 + 3y - 8}{2}$$

$$x = \frac{1 - 3y}{2}$$

Igualando-os aos a dois, temos as duas equações :

$$8 + 2y - 3z = \frac{-1 + 3y - 8}{2}$$

$$8 + 2y - 3z = \frac{11 + y - 2z}{2}$$

que se reduzem às seguintes por simplificação

$$y - 5z = -17, \quad 5y - 7z = -13.$$

Os valores de y tirados deste novo sistema são :

$$y = 5z - 17, \quad (2)$$

$$y = \frac{7z - 13}{5}$$

Estes dois valores dão a equação

$$5z - 17 = \frac{7z - 13}{5}$$

cuja raiz é $z = 4$ Para este valor de z , a primeira das equações (2) vem a ser

$$y = 5z - 17 = 5 \cdot 4 - 17 = 3$$

Para $y = 3$ e $z = 4$, a primeira das equações (1) dá

$$x + 2y = 8 \Rightarrow x + 2 \cdot 3 = 8 \Rightarrow x = 8 - 6 = 2$$

A solução do sistema proposto é

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 4.$$

Regra. — Para se resolver por comparação um sistema de 3 equações a 3 incógnitas :1.º Tiram-se os valores de x das 3 equações dadas e igualam-se esses valores 2 a 2, vem um sistema de 2 equações a 2 incógnitas y e z que se resolve ;2.º Levam-se os valores de y e z numa das equações que dão x e vem o valor de x .**IV Eliminação por redução ao mesmo coeficiente**

100. Regra. Para se resolver um sistema por este modo de redução ao mesmo coeficiente, é preciso

1.º Dar a uma das incógnitas a mesma coefficiente em todas as equações ; depois, somar ou subtrair estas equações duas a duas de modo a fazer desaparecer a incógnita que se tem escolhido com uma incógnita e uma equação a menos do que a proposta.

nesta modo faz-se desaparecer uma ou mais incógnitas e sistema reduz-se deste modo a um sistema de n equações com uma ou mais incógnitas que se resolve 1.º 87

Aplicação. — Resolver o sistema de equações

$$y + 2x = 8, \quad (1)$$

$$3y + x = 68, \quad (2)$$

Damos a x o mesmo coefficiente nas duas equações ; para isso, multiplicamos por 2 os dois membros da segunda. Ela vem a ser :

$$6y + 2x = 132. \quad (3)$$

Somando as equações (1) e (3), os termos em x desaparecem e obtemos

$$y + 2x + 6y + 2x = 8 + 132$$

ou ainda

$$7y = 140$$

Desta equação, tiramos

$$y = 20.$$

Este valor de y levado em (2) dá

$$x + 60 - 3y = 68 \Rightarrow x = 68 - 60 = 8$$

A solução deste sistema é

$$x = 8, \quad y = 20.$$

Regra. — Para se resolver por redução um sistema de 2 equações a 2 incógnitas1.º Dá-se a x o mesmo coefficiente em ambas equações ; depois, somam-se essas equações ; vem uma equação a uma incógnita y que se resolve2.º Leva-se o valor de y numa das 2 primeiras equações e vem o valor de x .

Aplicação. — Resolver o sistema

$$2x + 3y + z = 8,$$

$$5x - 2y - 2z = 1,$$

$$11x - 4y + 2z = 1.$$

1.º Substituímos o valor de x encontrado na equação (1) na equação (2).
 Assim, substituindo $x = 2y - 5$ na equação (2), temos:
 $2(2y - 5) + 3y = 10$
 $4y - 10 + 3y = 10$
 $7y = 20$
 $y = \frac{20}{7}$

2.º Substituímos o valor de y encontrado na equação (1) na equação (1).
 Assim, substituindo $y = \frac{20}{7}$ na equação (1), temos:
 $x = 2(\frac{20}{7}) - 5 = \frac{40}{7} - \frac{35}{7} = \frac{5}{7}$

3.º Verificamos se os valores encontrados satisfazem as duas equações originais.
 Para a equação (1):
 $2(\frac{5}{7}) + 3(\frac{20}{7}) = \frac{10}{7} + \frac{60}{7} = \frac{70}{7} = 10$
 Para a equação (2):
 $2(\frac{5}{7}) + 3(\frac{20}{7}) = \frac{10}{7} + \frac{60}{7} = \frac{70}{7} = 10$

Portanto, a solução do sistema é $x = \frac{5}{7}$ e $y = \frac{20}{7}$.

4.º Concluímos que o sistema tem uma única solução, que é $(\frac{5}{7}, \frac{20}{7})$.

5.º Resolvemos as equações (3) e (4) para encontrar os valores de x e y .
 Da equação (3):
 $2x + 3y = 10$
 $2x = 10 - 3y$
 $x = \frac{10 - 3y}{2}$
 Da equação (4):
 $2x + 3y = 10$
 $2(\frac{10 - 3y}{2}) + 3y = 10$
 $10 - 3y + 3y = 10$
 $10 = 10$

6.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (3) e (4).

7.º Para resolver o sistema de equações (5) e (6), vamos usar o método da eliminação.

1.º Subtraímos a equação (5) da equação (6).
 Assim, temos:
 $(2x + 3y) - (2x + 3y) = 10 - 10$
 $0 = 0$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (5) e (6).

3.º Para resolver o sistema de equações (7) e (8), vamos usar o método da substituição.

1.º Substituímos o valor de x encontrado na equação (7) na equação (8).
 Assim, substituindo $x = \frac{10 - 3y}{2}$ na equação (8), temos:
 $2(\frac{10 - 3y}{2}) + 3y = 10$
 $10 - 3y + 3y = 10$
 $10 = 10$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (7) e (8).

3.º Para resolver o sistema de equações (9) e (10), vamos usar o método da eliminação.

1.º Subtraímos a equação (9) da equação (10).
 Assim, temos:
 $(2x + 3y) - (2x + 3y) = 10 - 10$
 $0 = 0$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (9) e (10).

3.º Para resolver o sistema de equações (11) e (12), vamos usar o método da substituição.

1.º Substituímos o valor de x encontrado na equação (11) na equação (12).
 Assim, substituindo $x = \frac{10 - 3y}{2}$ na equação (12), temos:
 $2(\frac{10 - 3y}{2}) + 3y = 10$
 $10 - 3y + 3y = 10$
 $10 = 10$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (11) e (12).

3.º Para resolver o sistema de equações (13) e (14), vamos usar o método da eliminação.

1.º Subtraímos a equação (13) da equação (14).
 Assim, temos:
 $(2x + 3y) - (2x + 3y) = 10 - 10$
 $0 = 0$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (13) e (14).

3.º Para resolver o sistema de equações (15) e (16), vamos usar o método da substituição.

1.º Substituímos o valor de x encontrado na equação (15) na equação (16).
 Assim, substituindo $x = \frac{10 - 3y}{2}$ na equação (16), temos:
 $2(\frac{10 - 3y}{2}) + 3y = 10$
 $10 - 3y + 3y = 10$
 $10 = 10$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (15) e (16).

1.º Substituímos o valor de x encontrado na equação (1) na equação (2).
 Assim, substituindo $x = 2y - 5$ na equação (2), temos:
 $2(2y - 5) + 3y = 10$
 $4y - 10 + 3y = 10$
 $7y = 20$
 $y = \frac{20}{7}$

2.º Substituímos o valor de y encontrado na equação (1) na equação (1).
 Assim, substituindo $y = \frac{20}{7}$ na equação (1), temos:
 $x = 2(\frac{20}{7}) - 5 = \frac{40}{7} - \frac{35}{7} = \frac{5}{7}$

3.º Verificamos se os valores encontrados satisfazem as duas equações originais.

Para a equação (1):
 $2(\frac{5}{7}) + 3(\frac{20}{7}) = \frac{10}{7} + \frac{60}{7} = \frac{70}{7} = 10$
 Para a equação (2):
 $2(\frac{5}{7}) + 3(\frac{20}{7}) = \frac{10}{7} + \frac{60}{7} = \frac{70}{7} = 10$

Portanto, a solução do sistema é $x = \frac{5}{7}$ e $y = \frac{20}{7}$.

4.º Concluímos que o sistema tem uma única solução, que é $(\frac{5}{7}, \frac{20}{7})$.

5.º Resolvemos as equações (3) e (4) para encontrar os valores de x e y .

Da equação (3):
 $2x + 3y = 10$
 $2x = 10 - 3y$
 $x = \frac{10 - 3y}{2}$
 Da equação (4):
 $2x + 3y = 10$
 $2(\frac{10 - 3y}{2}) + 3y = 10$
 $10 - 3y + 3y = 10$
 $10 = 10$

6.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (3) e (4).

7.º Para resolver o sistema de equações (5) e (6), vamos usar o método da eliminação.

1.º Subtraímos a equação (5) da equação (6).
 Assim, temos:
 $(2x + 3y) - (2x + 3y) = 10 - 10$
 $0 = 0$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (5) e (6).

3.º Para resolver o sistema de equações (7) e (8), vamos usar o método da substituição.

1.º Substituímos o valor de x encontrado na equação (7) na equação (8).
 Assim, substituindo $x = \frac{10 - 3y}{2}$ na equação (8), temos:
 $2(\frac{10 - 3y}{2}) + 3y = 10$
 $10 - 3y + 3y = 10$
 $10 = 10$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (7) e (8).

3.º Para resolver o sistema de equações (9) e (10), vamos usar o método da eliminação.

1.º Subtraímos a equação (9) da equação (10).
 Assim, temos:
 $(2x + 3y) - (2x + 3y) = 10 - 10$
 $0 = 0$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (9) e (10).

3.º Para resolver o sistema de equações (11) e (12), vamos usar o método da substituição.

1.º Substituímos o valor de x encontrado na equação (11) na equação (12).
 Assim, substituindo $x = \frac{10 - 3y}{2}$ na equação (12), temos:
 $2(\frac{10 - 3y}{2}) + 3y = 10$
 $10 - 3y + 3y = 10$
 $10 = 10$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (11) e (12).

3.º Para resolver o sistema de equações (13) e (14), vamos usar o método da eliminação.

1.º Subtraímos a equação (13) da equação (14).
 Assim, temos:
 $(2x + 3y) - (2x + 3y) = 10 - 10$
 $0 = 0$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (13) e (14).

3.º Para resolver o sistema de equações (15) e (16), vamos usar o método da substituição.

1.º Substituímos o valor de x encontrado na equação (15) na equação (16).
 Assim, substituindo $x = \frac{10 - 3y}{2}$ na equação (16), temos:
 $2(\frac{10 - 3y}{2}) + 3y = 10$
 $10 - 3y + 3y = 10$
 $10 = 10$

2.º Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, que são todas as soluções das equações (15) e (16).

3.º Para resolver o sistema de equações (17) e (18), vamos usar o método da substituição.

2º Levando x numa das 2 primeiras equações e obtém-se o valor de y .

VI Resolução de alguns sistemas por meio de artifícios particulares.

100. Sistema I

$$\begin{cases} x + y + z + u = a, \\ x + y + z + u + v = b, \end{cases}$$

É evidente, por ser, a primeira a única subtrahida, dentro da mesma, cada uma das outras equações, e, portanto, cada vez três incógnitas.

Os dados assim sucessivamente:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad (x+y+z+u) - (x+y+z+u+v) &= a-b \\ \text{ou} \quad 0 &= a-b \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad (x+y+z+u) - (x+y+z+u+v) &= a-b, \\ 0 &= a-b, \\ z &= \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \quad (x+y+z+u) - (x+y+z+u+v) &= a-b, \\ 0 &= a-b, \\ y &= \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

4º Levando estes valores de x , y , z , para a primeira equação, ela se torna:

$$x + \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} + v = a,$$

A solução deste sistema é:

$$x = \frac{b+a-d-a}{2}, \quad y = \frac{a-d}{2}, \quad z = \frac{a-d}{2}, \quad u = \frac{a-d}{2}.$$

101. Sistema II

$$\begin{cases} x + y + z + u = a, \\ x + y + z + u + v = b, \\ x + y + z + u + v + w = c, \end{cases}$$

Somando-se estas duas equações, obtém-se

$$4x + 4y + 4z + 4u + 4v = a + b + c + d + f,$$

ou ainda

$$x + y + z + u + v = \frac{a+b+c+d+f}{4}$$

Esta equação subtrai-se sucessivamente cada uma das outras da primeira

$$1^\circ \quad (x+y+z+u+v) - (x+y+z+u) = \frac{a+b+c+d+f}{4} - a,$$

ou ainda

$$v = \frac{a+b+c+d+f}{4} - a$$

$$2^\circ \quad (x+y+z+u+v) - (y+z+u+v) = \frac{a+b+c+d+f}{4} - b$$

ou ainda

$$x = \frac{a+b+c+d+f-4b}{4}$$

$$3^\circ \quad (x+y+z+u+v) - (x+z+u+v) = \frac{a+b+c+d+f}{4} - c,$$

ou ainda

$$y = \frac{a+b+c+d+f}{4} - c$$

$$4^\circ \quad (x+y+z+u+v) - (x+y+v) = \frac{a+b+c+d+f}{4} - d,$$

ou ainda

$$z = \frac{a+b+c+d+f-4d}{4}$$

$$5^\circ \quad (x+y+z+u+v) - (x+y+z) = \frac{a+b+c+d+f}{4} - f,$$

ou ainda

$$u = \frac{a+b+c+d+f}{4} - f$$

102. Sistema III

$$\begin{cases} x + y + z + u = a, \\ x + y + z + u + v = b, \\ x + y + z + u + v + w = c, \end{cases}$$

$$\text{Logo } \frac{2}{x} = \frac{1}{y}$$

$$\text{Logo } \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$

Sistema A

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

$$x = 6, y = 4$$

$$x = 6, y = 4$$

$$x = 6, y = 4$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS A RESOLVER

$$883. x + y = 0$$

$$884. x + y = 0$$

$$885. x + y = 0$$

$$886. x + y = 0$$

$$887. x + y = 0$$

$$888. x + y = 0$$

$$889. x + y = 0$$

$$890. 8x - 21 = 0$$

$$891. 3x - (8x - 1) = 0$$

$$892. 4x - 0y = 46$$

$$893. x + y = 22$$

$$894. x - 2y = 1$$

$$895. 0x + 8y = 48$$

$$896. 15x - 6y = 185$$

$$897. 11x - 8y = 85$$

$$897. x - y = 12$$

$$898. \frac{1}{x-y} = 12$$

$$899. \frac{1}{x-y} = 12$$

$$900. 5x - 2y = 484$$

$$901. 7x + 4y = 997$$

$$902. \frac{7x}{2} - 2y = 20$$

$$903. \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 75$$

$$904. x - y = 12$$

$$905. x - y = 12$$

$$906. x - y = 12$$

$$907. x - y = 12$$

$$908. x - y = 12$$

$$909. x - y = 12$$

$$910. x - y = 12$$

$$911. x - y = 12$$

$$912. x - y = 12$$

$$913. x - y = 12$$

$$914. x - y = 12$$

$$915. x - y = 12$$

$$916. x - y = 12$$

$$917. x - y = 12$$

$$918. x - y = 12$$

$$919. x + y = 10$$

$$920. x + y = 10$$

$$921. x + y = 10$$

$$922. x + y = 10$$

$$923. x + y = 10$$

$$924. x + y = 10$$

$$925. x + y = 10$$

$$926. x + y = 10$$

$$927. x + y = 10$$

$$928. x + y = 10$$

$$929. x + y = 10$$

$$930. x + y = 10$$

$$931. x + y = 10$$

$$932. x + y = 10$$

$$933. x + y = 10$$

$$934. x + y = 10$$

$$935. x + y = 10$$

$$936. x + y = 10$$

$$937. x + y = 10$$

$$938. x + y = 10$$

$$939. x + y = 10$$

$$940. x + y = 10$$

$$922. \begin{cases} 3(x+y) \\ 7(x+y) + 4(x-y) = \end{cases}$$

$$923. \frac{2x+3y}{9} + \frac{2x-3y}{1} =$$

$$4x-3y \quad 2(3y-x) = \frac{5}{4}$$

$$924. \quad$$

$$925. \frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{5(4x-5y+6)} = 0$$

$$\frac{1}{6(5x-3y+4)} - \frac{1}{5(3x+2y+1)} = 0$$

$$926. \begin{cases} x-y=1 \\ x^2-y^2=21 \end{cases}$$

EQUAÇÕES LITERAIS

$$927. \quad$$

$$928. \quad$$

$$929. \quad$$

$$930. \quad$$

$$931. \quad$$

$$932. \quad$$

$$933. \quad$$

$$934. \quad$$

$$935. \quad$$

$$b + \frac{9}{a} = 5$$

$$936. \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2a$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2b$$

$$937. \begin{cases} ax+by=2(a+b) \\ ax-by=2(a-b) \end{cases}$$

$$938. \quad$$

$$939. \quad$$

$$\frac{x}{a} =$$

$$940. \quad$$

$$941. \quad$$

$$942. \quad$$

$$943. \quad$$

$$944. \quad$$

$$945. \quad$$

$$946. \quad$$

$$947. \quad$$

$$948. \quad$$

$$949. \quad$$

$$950. \quad$$

10. CASOS DE VALORES NUMÉRICOS

$$951. \quad$$

$$952. \quad$$

$$953. \quad$$

$$954. \quad$$

$$955. \quad$$

$$956. \quad$$

$$957. \quad$$

$$958. \quad$$

$$959. \quad$$

$$960. \quad$$

$$961. \quad$$

$$x+y+z=(a+b+c)^2$$

$$962. \frac{a}{6} + \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{d}{8}$$

$$x+y+z+c=2040$$

$$963. \frac{x}{2} = y = \frac{6}{8}$$

$$3x+5y+z=24$$

$$964. mx+ny=ap$$

$$ax+by+cz=d$$

$$965. \quad$$

CAPITULO IV

PROBLEMAS A VARIAS INCOGNITAS

I. Resolução de alguns problemas

106. Problema I. Repartir o numero 1000 em duas partes que na R. P. da primeira dos dois a do 1 a da segunda a do 10.

Sejam x e y as duas partes.

As condições do problema são as duas equações

$$x + y = 1000, \quad \frac{5x}{6} = \frac{y}{4}$$

Escrevendo as duas equações da mesma forma, vem

$$0x - 3y = -1000$$

Somando esta com a primeira teremos

$$0x - 3y + 4x - y = 425 + 3 \cdot 1000$$

de onde

$$y = 100$$

Substituímos y levando este valor de x para a primeira equação, que vem a ser

$$x + 100 = 1000$$

de

$$y = 100$$

Resp. As duas partes são 240 e 100

107. Problema II. — Pedro e Paulo têm certo numero de laranjas. Se Paulo desse 12 laranjas a Pedro, cada um teria a mesma numero; pelo contrario, se Pedro desse os 3/5 das suas a Paulo o numero de laranjas de Paulo seria aumentado de seus 3/8. Quantas laranjas possui cada um?

Sejam x e y as duas quantidades de laranjas de Pedro e Paulo.

Se Pedro tem 12 laranjas a mais do que Paulo

temos a equação

$$y - 12 = x + 12 \quad \text{ou} \quad y - x = 24 \quad (1)$$

Se Pedro der os 3/5 das suas laranjas a Paulo, o haver de Paulo aumentará de seus 3/8; temos pois para a segunda equação do problema

$$\frac{3y}{8}$$

ou reduzindo

$$y = 8x + 32$$

Esta equação dá $x = \frac{5y}{8}$. Para este valor de x a equação (1)

$$y - \frac{5y}{8} = 24, \quad \text{donde} \quad y = 64$$

Substituímos y , levando este valor de y na equação (2),

$$x = 40$$

Resposta. Pedro tem 40 laranjas e Paulo 64.

108. Problema III. — Um numero tem 3 algarismos e a soma dos centenas é a soma das duas outras, e cinco vezes a primeira unidade faz a soma de das dezenas e da das centenas. Invertendo este numero sabendo que invertendo-se a ordem dos algarismos dá o que de 50

em x, y, z , os algarismos restam os centenas das dezenas e das unidades do numero a ser 30

A primeira e segunda equação do problema foi assim as

$$5z = x + y$$

No sistema de algarismos procurado e este mesmo numero, de algarismos invertidos, exprimem-se respectivamente por

$$100x + 10y + z \quad \text{e} \quad 100z + 10y + x$$

Portanto, sua diferença fornece a equação

$$100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 30$$

que se reduz a

$$x - z = 6$$

Reunindo as equações precedentes, temos o sistema

$$x = y + z,$$

$$x = 5z - y,$$

$$x - z = 6$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Comparando primeiro (1) e (3), e depois (1) e (2), temos primeiro

$$y + z = x + 6, \quad \text{donde} \quad y = 6.$$

e em segundo lugar

$$5z - y \quad \text{donde} \quad z = 3$$

A equação (1) dá

$$x = 6 + 3 = 9$$

Resp. : O numero procurado é 963

109. Problema IV. — Uma liga de cobre e de estanho pesa 100 kg. Sabendo-se que a densidade do cobre é de 8,9 e a do estanho de 7,3, as densidades destes metais são respectivamente 8,9 e 7,3

Sejam x e y os pesos do cobre e do estanho. Temos para a primeira equação.

$$x + y = 100 \quad (1)$$

Mergulhamos na água, 1 dm³ de cobre e 1 dm³ de estanho, perdem 1 Kg cada um, em virtude do princípio de Arquimedes.

Posto isto, para se achar a segunda equação, raciocina-se da seguinte maneira:

1 Kg sobre 8,8 = 0,1136 Kg de cobre e 1 Kg sobre 7,2 = 0,1389 Kg de estanho.

do cobre da liga perder-se-á $\frac{x}{8,8}$.

Do mesmo modo acha-se que os y Kg de estanho perdem na água $\frac{y}{7,2}$.

Ora, a perda feita sobre os dois metais é 100—87,5 = 12 Kg.5. Temos, pois, a equação,

$$\frac{x}{8,8} + \frac{y}{7,2} = 12,5 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema das equações (1) e (2), achamos 55 kg de cobre e 45 kg de estanho.

113 Problema V Divide-se um capital em 3 partes que se emprestam a juros simples durante 3 anos, às taxas respectivas de 3, 4 e 5 % por ano. Estas partes são tais que os juros da primeira e da segunda valem juntos 2.720\$, os juros da 1.ª parte e da 3.ª valem juntos 3.300\$, enfim a soma dos juros das duas últimas partes é 3.300\$. Peça-se cada parte e o capital total.

As tres partes se dão x , y e o capital $x + y$, os juros das x partes por 3 anos serão respectivamente

$$\frac{3x}{100} \quad \frac{4y}{100}$$

Temos, pois, as tres equações

$$9x + 12y = 30, \quad (1)$$

$$3x + 15y = 33, \quad (2)$$

$$12y + 15y = 33, \quad (3)$$

$$27y = 33, \quad (4)$$

$$y = 1, \quad (5)$$

$$x = 2, \quad (6)$$

que se reduzem às tres seguintes:

$$3x + 4y = 93000, \quad (1)$$

$$3x + 5y = 110000, \quad (2)$$

$$2y + 5 = 110000, \quad (3)$$

Substituindo a equação (3) com a diferença das equações (1)

$$5y = 17000 \quad y = 3400$$

$$x = 12000$$

$$ou \quad y = 12000$$

As equações (1) e (3) dão em seguida

$$x = 15000 \quad e \quad z = 13000$$

$$Resposta: O capital é de 40000$ e as partes são de 15000$, 13000$ e 12000$.$$

$$total, 40000$.$$

PROBLEMAS A VARIAS INCOGNITAS

908. Repartir 122 em duas partes tais que os 5/7 de uma e os 3/5 de outra façam 67.

909. O quociente de dois números é 6 e a diferença 104. Quais são os números?

910. A soma de dois números é 67 e a diferença, dividida pelo menor, dá o quociente 8 e o resto 5. Q. estes dois números?

911. Achar dois números cuja soma seja 169 e o quociente 12.

912. A soma de dois números é 67 e a diferença, dividida pelo menor, dá o quociente 8 e o resto 5. Q. estes dois números?

913. Achar dois números cuja soma seja 169 e o quociente 12.

914. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

915. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

916. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

917. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

918. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

919. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

920. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

921. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

922. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

923. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

924. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

925. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

926. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

927. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

928. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

929. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

930. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

931. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

932. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

933. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

934. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

935. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

936. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

937. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

938. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

939. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

940. Achar dois números tais que sua soma sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 2 e 8.

980. A arroba B. Tapia é vendida a mais que o ouro, tinha 1 arroba e a sua algação e quantia. Ser laser tal os anos como venho. Para ainda 9 anos mais de que o Ser. Quantos anos de mais vendes?

981. Vendendo para a por 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

982. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

983. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

984. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

985. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

986. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

987. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

988. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

989. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

990. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

991. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

992. Um fazendeiro vendeu 1.200 arrobas de ouro, deu um fazendeiro, possuía comprar mais o ser e de 100\$ de ouro. O que vendes por 1.200, deu um fazendeiro a por 1.200 de ouro. O que vendes por 1.200 de ouro?

993. Um fazendeiro tem duas barras formadas de ouro e de prata. A 1ª tem por toqua 95 e a 2ª 93. Que peso de cada barra se deve levar para se obter uma liga de toqua 90?

994. Um negociante de vinhos vendeu 30 p. de vinho de Borgonha 5 l. de Bordões e 5 l. de Champagnão por 65\$, segunda vez vendeu 5 l. de Borgonha 10 de Bordões e 12 de Champagnão por 60\$, 3ª vez vendeu 20 l. de Borgonha, 4 de Bordões e 10 de Champagnão por 70\$. Qual é o preço do litro de cada qualidade?

PÍTULO V

RESOLUÇÃO

1.1. As duas barras a considerar na resolução de um problema de algebra

1ª. pôr o problema em equações como vimos a n.º 88 e seg.

2ª. resolver as equações como vimos na n.º 98 e seg.

3ª. resolver as equações como vimos na n.º 98 e seg.

4ª. resolver as equações como vimos na n.º 98 e seg.

5ª. resolver as equações como vimos na n.º 98 e seg.

1. Casos de impossibilidade

112. Um problema de primeiro grau é geralmente impossível quando as quatro circunstâncias seguintes se verificam:

1ª. Quando o enunciado exige uma solução positiva e a resolução do problema conduz a uma solução negativa.

2ª. Quando a solução é um número fracionário de pessoas ou

3ª. Quando a solução é da forma

4ª. Quando a solução é da forma

5ª. Quando a solução é da forma

6ª. Quando a solução é da forma

7ª. Quando a solução é da forma

8ª. Quando a solução é da forma

9ª. Quando a solução é da forma

10ª. Quando a solução é da forma

Negra. — Se a negatita do problema for suscetível de se tomar em dois sentidos opostos o valor absoluto da solução negativa unidade é a verdade na equação, e a zero que a acompanha mostra que é preciso tomá-la no sentido contrario do que indica o sentido da problema.

Exemplo. — Um pai tem 51 anos e o filho 15. daqui a quantos anos a idade do pai será 10 vezes a idade do filho?

Designar ao se por x o número de anos que devem decorrer e este agora age a época passada a idade do pai será então $51+x$ e a do filho $15+x$.

Teremos para a equação do problema

$$10 \times (15+x) = 51+x,$$

donde

$$x = -11$$

Esse resultado mostra que o problema assim exposto é impossível. 11 vezes os irmãos ar-lho o enunciado como segue: "Um pai tem 51 anos e o filho 15. ha quantos anos que a idade do pai era 10 vezes a idade do filho?" Designando-se por x o tempo ha entre desuo a época em que a idade do pai era 10 vezes a idade do filho, teremos para a equação do problema

$$10 \times (15-x) = 51-x,$$

cujas raiz é

$$x = 11$$

Ha portanto 11 anos que se realizou a solução do problema. A respeito da unidade antes, indica uma época passada e deve interpretá-la neste sentido.

14. Observação. Nos problemas de algebra as primeiras quatro classes dos etiveis de receber duas significações: as perdas são o tempo, as mudanças de temperaturas, os lucros e as perdas, as velocidades etc.

15. Segundo caso. Em geral, um problema é impossível quando a solução é um numero fraccionario de pessoas ou de coisas que não podem existir senão inteiras.

Exemplo. — Um tiro do alvo, um jogador deca 20 tiros, pagou \$450 por tiro errado e recebeu 1\$ por tiro certo. Quantas vezes acertou o alvo, se deve \$500 ao mestre de tiro?

Seja x o numero de tiros felizes; 20 - x será o dos tiros errados. O jogador ganhou 1\$ e perdeu 0.45 = 45% de 20.

donde a equação

$$0,45 \times (20-x) - x = 0,50.$$

$$x = 5,86$$

Terceiro caso. — Um problema é impossível ou absurdo quando a solução é da forma $\frac{a}{b}$.

Um numero é infinito quando é maior do que qualquer quantidade dada, por maior que ela seja.

os quocientes

$$\frac{1}{0,01}, \frac{1}{0,0001}, \frac{1}{0,000001}, \frac{1}{0,00000001}, \text{ etc.}$$

$$400, 40000, 4000000, 400000000, \text{ etc.}$$

o aumentando o conceito se pois que, para o valor de x vier a ser cada vez menor, o quociente será cada vez maior, tanto se o divisor vier a ser nada, o quociente será infinito.

representando o infinito pelo simbolo ∞ e um numero x pela letra a , temos

Exemplo. — Achar um numero cuja metade, aumentada com o numero e de 20, faça o 26,14 o mesmo numero multiplicado de 20.

Então este numero por x , temos a equação.

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{7} + 20 = \frac{13x}{14} + 60.$$

se reduz ao absurdo

$$40 = 60$$

efectuamos a redução completa dos termos da equação, acharmos sucessivamente

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{7} + 20 = \frac{13x}{14} + 60,$$

$$\frac{13x}{14} - \frac{13x}{14} = 20,$$

$$\frac{13}{14} - \frac{13}{14} = 2.$$

donde se deduz successivamente

$$4y - 4y = 804 - 804,$$

$$y = \frac{804 - 804}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

Conviem observar que as duas equações

$$\frac{x}{4} + \frac{3y}{8} = 27, \quad y = 27,$$

o

$$6x + 5y = 210$$

vêm a ser uma única equação se as reduzirmos à forma

$$ax + by = c$$

A primeira dá também, com efeito

$$6x + 5y = 210.$$

Disto resulta que não havia senão uma só equação de duas incógnitas para resolver este problema

III. Discussão dos problemas a uma só incógnita

120. Definição — Dizem-se *problemas* e *estabelecem* as equações que o problema *possível*, *impossível* ou *indeterminado* é da interpretação das soluções quando os coeficientes das equações são dados os seguintes dados

A interpretação de um problema é dada pela sua equação que se escreve da seguinte forma

121. Discussão da equação $ax = b$. A forma geral da equação é

$$ax = b \quad (1)$$

sua formula de resolução é

$$x = \frac{b}{a} \quad (2)$$

Para discutir os dois casos de valores dos coeficientes a e b , temos

Em cada caso faremos a hipótese $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a = 0$, $b = 0$

Primeiro caso $a \neq 0$. Segundo caso $a = 0$. Terceiro caso $a = 0$. Quarto caso $a = 0$. Quinto caso $a = 0$. Sexto caso $a = 0$. Sétimo caso $a = 0$. Oitavo caso $a = 0$. Nono caso $a = 0$. Décimo caso $a = 0$. Undécimo caso $a = 0$. Doze caso $a = 0$. Treze caso $a = 0$. Quatorze caso $a = 0$. Quinze caso $a = 0$. Dezesseis caso $a = 0$. Dezessete caso $a = 0$. Dezoito caso $a = 0$. Dezanove caso $a = 0$. Vinte caso $a = 0$. Vinte e um caso $a = 0$. Vinte e dois caso $a = 0$. Vinte e três caso $a = 0$. Vinte e quatro caso $a = 0$. Vinte e cinco caso $a = 0$. Vinte e seis caso $a = 0$. Vinte e sete caso $a = 0$. Vinte e oito caso $a = 0$. Vinte e nove caso $a = 0$. Trinta caso $a = 0$. Trinta e um caso $a = 0$. Trinta e dois caso $a = 0$. Trinta e três caso $a = 0$. Trinta e quatro caso $a = 0$. Trinta e cinco caso $a = 0$. Trinta e seis caso $a = 0$. Trinta e sete caso $a = 0$. Trinta e oito caso $a = 0$. Trinta e nove caso $a = 0$. Quarenta caso $a = 0$. Quarenta e um caso $a = 0$. Quarenta e dois caso $a = 0$. Quarenta e três caso $a = 0$. Quarenta e quatro caso $a = 0$. Quarenta e cinco caso $a = 0$. Quarenta e seis caso $a = 0$. Quarenta e sete caso $a = 0$. Quarenta e oito caso $a = 0$. Quarenta e nove caso $a = 0$. Cinquenta caso $a = 0$. Cinquenta e um caso $a = 0$. Cinquenta e dois caso $a = 0$. Cinquenta e três caso $a = 0$. Cinquenta e quatro caso $a = 0$. Cinquenta e cinco caso $a = 0$. Cinquenta e seis caso $a = 0$. Cinquenta e sete caso $a = 0$. Cinquenta e oito caso $a = 0$. Cinquenta e nove caso $a = 0$. Sesenta caso $a = 0$. Sesenta e um caso $a = 0$. Sesenta e dois caso $a = 0$. Sesenta e três caso $a = 0$. Sesenta e quatro caso $a = 0$. Sesenta e cinco caso $a = 0$. Sesenta e seis caso $a = 0$. Sesenta e sete caso $a = 0$. Sesenta e oito caso $a = 0$. Sesenta e nove caso $a = 0$. Setenta caso $a = 0$. Setenta e um caso $a = 0$. Setenta e dois caso $a = 0$. Setenta e três caso $a = 0$. Setenta e quatro caso $a = 0$. Setenta e cinco caso $a = 0$. Setenta e seis caso $a = 0$. Setenta e sete caso $a = 0$. Setenta e oito caso $a = 0$. Setenta e nove caso $a = 0$. Oitenta caso $a = 0$. Oitenta e um caso $a = 0$. Oitenta e dois caso $a = 0$. Oitenta e três caso $a = 0$. Oitenta e quatro caso $a = 0$. Oitenta e cinco caso $a = 0$. Oitenta e seis caso $a = 0$. Oitenta e sete caso $a = 0$. Oitenta e oito caso $a = 0$. Oitenta e nove caso $a = 0$. Noventa caso $a = 0$. Noventa e um caso $a = 0$. Noventa e dois caso $a = 0$. Noventa e três caso $a = 0$. Noventa e quatro caso $a = 0$. Noventa e cinco caso $a = 0$. Noventa e seis caso $a = 0$. Noventa e sete caso $a = 0$. Noventa e oito caso $a = 0$. Noventa e nove caso $a = 0$. Cem caso $a = 0$. Cem e um caso $a = 0$. Cem e dois caso $a = 0$. Cem e três caso $a = 0$. Cem e quatro caso $a = 0$. Cem e cinco caso $a = 0$. Cem e seis caso $a = 0$. Cem e sete caso $a = 0$. Cem e oito caso $a = 0$. Cem e nove caso $a = 0$. Cento e dez caso $a = 0$. Cento e onze caso $a = 0$. Cento e doze caso $a = 0$. Cento e treze caso $a = 0$. Cento e quatorze caso $a = 0$. Cento e quinze caso $a = 0$. Cento e dezesseis caso $a = 0$. Cento e dezessete caso $a = 0$. Cento e dezoito caso $a = 0$. Cento e dezanove caso $a = 0$. Cento e vinte caso $a = 0$. Cento e vinte e um caso $a = 0$. Cento e vinte e dois caso $a = 0$. Cento e vinte e três caso $a = 0$. Cento e vinte e quatro caso $a = 0$. Cento e vinte e cinco caso $a = 0$. Cento e vinte e seis caso $a = 0$. Cento e vinte e sete caso $a = 0$. Cento e vinte e oito caso $a = 0$. Cento e vinte e nove caso $a = 0$. Cento e trinta caso $a = 0$. Cento e trinta e um caso $a = 0$. Cento e trinta e dois caso $a = 0$. Cento e trinta e três caso $a = 0$. Cento e trinta e quatro caso $a = 0$. Cento e trinta e cinco caso $a = 0$. Cento e trinta e seis caso $a = 0$. Cento e trinta e sete caso $a = 0$. Cento e trinta e oito caso $a = 0$. Cento e trinta e nove caso $a = 0$. Cento e quarenta caso $a = 0$. Cento e quarenta e um caso $a = 0$. Cento e quarenta e dois caso $a = 0$. Cento e quarenta e três caso $a = 0$. Cento e quarenta e quatro caso $a = 0$. Cento e quarenta e cinco caso $a = 0$. Cento e quarenta e seis caso $a = 0$. Cento e quarenta e sete caso $a = 0$. Cento e quarenta e oito caso $a = 0$. Cento e quarenta e nove caso $a = 0$. Cento e cinquenta caso $a = 0$. Cento e cinquenta e um caso $a = 0$. Cento e cinquenta e dois caso $a = 0$. Cento e cinquenta e três caso $a = 0$. Cento e cinquenta e quatro caso $a = 0$. Cento e cinquenta e cinco caso $a = 0$. Cento e cinquenta e seis caso $a = 0$. Cento e cinquenta e sete caso $a = 0$. Cento e cinquenta e oito caso $a = 0$. Cento e cinquenta e nove caso $a = 0$. Cento e sessenta caso $a = 0$. Cento e sessenta e um caso $a = 0$. Cento e sessenta e dois caso $a = 0$. Cento e sessenta e três caso $a = 0$. Cento e sessenta e quatro caso $a = 0$. Cento e sessenta e cinco caso $a = 0$. Cento e sessenta e seis caso $a = 0$. Cento e sessenta e sete caso $a = 0$. Cento e sessenta e oito caso $a = 0$. Cento e sessenta e nove caso $a = 0$. Cento e setenta caso $a = 0$. Cento e setenta e um caso $a = 0$. Cento e setenta e dois caso $a = 0$. Cento e setenta e três caso $a = 0$. Cento e setenta e quatro caso $a = 0$. Cento e setenta e cinco caso $a = 0$. Cento e setenta e seis caso $a = 0$. Cento e setenta e sete caso $a = 0$. Cento e setenta e oito caso $a = 0$. Cento e setenta e nove caso $a = 0$. Cento e oitenta caso $a = 0$. Cento e oitenta e um caso $a = 0$. Cento e oitenta e dois caso $a = 0$. Cento e oitenta e três caso $a = 0$. Cento e oitenta e quatro caso $a = 0$. Cento e oitenta e cinco caso $a = 0$. Cento e oitenta e seis caso $a = 0$. Cento e oitenta e sete caso $a = 0$. Cento e oitenta e oito caso $a = 0$. Cento e oitenta e nove caso $a = 0$. Cento e noventa caso $a = 0$. Cento e noventa e um caso $a = 0$. Cento e noventa e dois caso $a = 0$. Cento e noventa e três caso $a = 0$. Cento e noventa e quatro caso $a = 0$. Cento e noventa e cinco caso $a = 0$. Cento e noventa e seis caso $a = 0$. Cento e noventa e sete caso $a = 0$. Cento e noventa e oito caso $a = 0$. Cento e noventa e nove caso $a = 0$. Cento e cem caso $a = 0$. Cento e cem e um caso $a = 0$. Cento e cem e dois caso $a = 0$. Cento e cem e três caso $a = 0$. Cento e cem e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e seis caso $a = 0$. Cento e cem e sete caso $a = 0$. Cento e cem e oito caso $a = 0$. Cento e cem e nove caso $a = 0$. Cento e cem e dez caso $a = 0$. Cento e cem e onze caso $a = 0$. Cento e cem e doze caso $a = 0$. Cento e cem e treze caso $a = 0$. Cento e cem e quatorze caso $a = 0$. Cento e cem e quinze caso $a = 0$. Cento e cem e dezesseis caso $a = 0$. Cento e cem e dezessete caso $a = 0$. Cento e cem e dezoito caso $a = 0$. Cento e cem e dezanove caso $a = 0$. Cento e cem e vinte caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e um caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e dois caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e três caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e seis caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e sete caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e oito caso $a = 0$. Cento e cem e vinte e nove caso $a = 0$. Cento e cem e trinta caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e um caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e dois caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e três caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e seis caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e sete caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e oito caso $a = 0$. Cento e cem e trinta e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e dez caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e onze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e doze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e treze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quatorze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quinze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e dezesseis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e dezessete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e dezoito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e dezanove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e vinte e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e trinta e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e dez caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e onze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e doze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e treze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quatorze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quinze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e dezesseis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e dezessete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e dezoito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e dezanove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e vinte e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e trinta e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e dez caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e onze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e doze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e treze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quatorze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quinze caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e dezesseis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e dezessete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e dezoito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e dezanove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e vinte e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e seis caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e sete caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e oito caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e trinta e nove caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quarenta caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quarenta e um caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quarenta e dois caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quarenta e três caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quarenta e quatro caso $a = 0$. Cento e cem e quarenta e quarenta e quarenta e quarenta e cinco caso $a = 0$. Cento e cem e

Seja a a distância MN que separa os dois correios e x o deslocamento percorrido pelo segundo antes de ser apanhado pelo primeiro. A distância percorrida pelo primeiro A será

$$M_1 = a + x$$

$$v_1 t = a + x$$

$$v_2 t = x$$

Logo

Como estas variáveis são iguais a equação do problema é

$$v_1 t = a + v_2 t$$

Para discutirmos esta fórmula distinguiremos tres casos conforme $v = v'$ for positivo, nulo, ou negativo

Primeiro caso $v = 0$. Neste caso a equação $v = v' > 0$, podemos ter $v > 0$ ou $v < 0$.

1.º $v > 0$. Nesta hipótese, o valor de x é positivo e o encontro se dará à direita do ponto N e ambos estarão na função

2.º $v < 0$. Neste caso, significa que os dois correios estão juntos no momento da saída, e como $x = \frac{av}{v-v'}$

$\frac{0}{v-v'} = 0$, eles não se encontram senão no instante da saída.

Segundo caso $v = v'$. A condição $v = v'$ dá lugar a duas possibilidades, nomeadamente

1.º $v = 0$. Neste caso, temos $x = \frac{av}{v-v'} = \frac{av}{0} = \infty$,

$$x = \frac{av}{0} = \infty,$$

que indica que o caminho percorrido por B é infinito e o problema é impossível.

2.º $v = 0$. Neste caso, temos $x = \frac{av}{v-v'} = \frac{av}{0} = \infty$. O problema é inde-

terminado. Isto é, os correios estão sempre juntos. É fácil conceber o, pois, se a distância deles $d=0$ e as velocidades são iguais.

Tercer caso $v = v' < 0$. Nesta hipótese, mostra-se que x é menor do que a , por conseguinte, a velocidade de A é menor do que a velocidade de B .

1.º $v > 0$. Esta condição dá para x o valor negativo

$$x = \frac{av}{v-v'} = \frac{av}{v-v'}$$

o que prova que o encontro se faz à esquerda de M e antes que A estivesse em M e B em N .

2.º $v = 0$. Neste caso, $x = \frac{av}{v-v'} = 0$. Os dois correios es-

tão juntos no ponto de saída, não se podem encontrar senão neste ponto

quando da discussão

$v = v' > 0$ } O encontro se dará à direita de N
 $v = v' = 0$ } Os correios se encontram na saída.
 $v = v' < 0$ } Os correios nunca se encontrarão.
 $d = 0$ } Estão sempre juntos
 $v = v' < 0$ } O encontro se deu à esquerda de M .
 $d = 0$ } O encontro não se dá senão na saída

IV. Discussão dos problemas do primeiro grau a duas incógnitas

1.º Fórmulas gerais. Resolvendo-se o problema do primeiro grau a duas incógnitas, as equações gerais das equações e as fórmulas mais gerais são

$$ax + by = c, \quad (1) \quad \text{e} \quad a'x + b'y = c', \quad (2)$$

Os valores de x e de y tirados destas equações, são dados pelas fórmulas

$$x = \frac{cb' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}$$

A constante das equações e das fórmulas são chamadas regras de sinais.

1.º Regra de formação do denominador comum. Para se obter o denominador comum ab' dos valores de x e de y , faz-se de uma parte o produto do coeficiente de x na primeira equação pelo coeficiente de y na segunda, e de outra

o produto do coeficiente de x na segunda pela constante da x na primeira e depois subtrair-se o segundo produto do primeiro.

Regra para se formar o numerador de x . No denominador comum ab' ou ba' , substitua-se os coeficientes a e b de x respectivamente pelas termas conhecidas c e c' e então se ca' for maior que cb' , a subtração; se não, para o numerador de x .

Regra para se formar o numerador de y . No denominador comum ab' ou ba' substitua-se os coeficientes a e b de y pelos coeficientes conhecidos c e c' , e então se ca' for maior que cb' , a subtração; se não, para o numerador de y .

Para obter estas regras, basta tomar 1 lugar de x e obter y e vice-versa, e obter x e obter y e vice-versa.

Aplicação. — Seja resolver as equações

$$\begin{aligned} 7x - 3y &= 110 \\ 2x - 3y &= 40 \end{aligned}$$

Aplicação a regra (25), o denominador comum dos coeficientes de x e de y será

$$7 \times -3 - 10 \times 2 = -41$$

Para obter o numerador de x preciso, na expressão

$$7x - 3y = 110 \times 2,$$

substituir os coeficientes 7 e 10 de x respectivamente por 110 e 40. Obtem-se para o numerador de x a expressão

$$110 \times -3 - 40 \times 2 = -410$$

O numerador de y se obtém substituindo, na de denominador comum $7 \times -3 - 10 \times 2$, os coeficientes 3 e -3 de y por 110 e 40 e vem

$$7 \times 40 - 10 \times 110 = -820$$

Pode-se pois escrever

$$x = \frac{-410}{-41} = 10, \quad y = \frac{-820}{-41} = 20$$

12°. Se Um negociante quer pagar 92\$ com 31 notas, umas de 5\$ e outras de 2\$. Qual será o número das notas de cada espécie?

Se x e y são estes dois números de notas, temos as duas equações

$$x + y = 31 \quad e \quad 5x + 2y = 92$$

Conforma a regra (125), o denominador comum será

$$1 \times 2 - 5 \times 1 = -3$$

A regra (135) dá para o numerador de x

$$31 \times 2 - 92 \times 1 = -30$$

Emfim (136), para o numerador de y , teremos,

$$1 \times 92 - 5 \times 31 = -63$$

Portanto

$$x = \frac{-30}{-3} = 10 \quad y = \frac{-63}{-3} = 21$$

Assim, haverá 10 notas de 5\$ e 21 notas de 2\$.

25. Derivação das fórmulas de resolução das equações de 1.º grau. Se as equações (25) e (26) tiverem x e y valores determinados positivos, negativos, ou infinitos, os coeficientes a e b não podem ser iguais a zero.

Se a e b não são iguais a zero, as equações (25) e (26) terão um valor determinado para x e y . Se a e b são iguais a zero, as equações (25) e (26) não terão solução.

Primeiro caso. $a = 0$ e $b \neq 0$. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, as equações (25) e (26) não terão solução.

O valor de x é infinito, pois toma a forma $\frac{a}{0}$. m não tem valor.

26. Teorema. Se o sistema de 2 equações de 1.º grau se reduzir de x for infinito o valor de y a uma constante,

o sistema não tem solução.

$$ab' - ba' = 0 \quad e \quad cb' - bc' \neq 0$$

tem

$$ab' = ba' \quad e \quad cb' \neq bc'$$

e depois

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad e \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

donde :

$$\text{ou } ac' = a'e$$

ou ainda

$$ac' - a'e = 0$$

Logo, os valores de x e de y tomam ambos a forma $\frac{m}{0}$ e são

$$x = \frac{a'c' - a'e}{a'b' - ba'} = \frac{0}{0} \quad y = \frac{c'b' - bc'a'}{a'b' - ba'} = \frac{0}{0}$$

Teorema - Se as duas equações de 1.º grau em x e y forem incompatíveis, então, os seus membros não são proporcionais.

Como

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

podemos fazer

$$a = a'k$$

é a diferença de k

Donde se deduz

$$a = a'k, \quad b = b'k, \quad c = c'k$$

Substituindo estes valores na equação (1) vem

$$a'x + b'y = c$$

ou

$$a'x + b'y = c'$$

O sistema proposto se reduz a

$$a'x + b'y = c'$$

$$a'x + b'y = c'$$

Se $a'x + b'y$ não pôde ter dois valores diferentes c' e c' .

segundo caso, $ab' - ba' = 0$ e $cb' - bc'a' = 0$.

O valor de x toma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Teorema - Se o sistema de 2 equações de 1.º grau se for indeterminado, x e y serão também

com efeito, de

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{e} \quad cb' - bc'a' = 0$$

deduz se

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

donde vem,

e ainda

$$ac' = a'e \quad \text{ou} \quad ac' - a'e = 0$$

Logo os valores de x e de y têm ambos a forma $\frac{0}{0}$ e o sistema é indeterminado.

Teorema - Se o sistema de 2 equações de 1.º grau, em x e y forem duas equações, as 2 equações são idênticas

com efeito, pois que temos

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

podemos escrever

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

donde vem :

$$a = a'k, \quad b = b'k, \quad c = c'k$$

Substituindo estes valores na equação (1) vem,

$$a'kx + b'ky = c'k$$

e dividindo por k

$$a'x + b'y = c'$$

equação idêntica à segunda.

tante k .

RESUMO DA DISCUSSÃO

$ab' - ba' = 0$ } x e y têm valores determinados positivos, negativos, ou nulos

$cb' - bc'a' = 0$ } x é infinito, y é 0 e as equações são incompatíveis.

$ab' - ba' = 0$ } e as duas equações são idênticas

CAPÍTULO VI

INIGUALDADES

Definições. — A a é maior do que b se a diferença $a - b$ for positiva. Se $a - b$ for negativa, b é maior do que a . Se $a - b$ for zero, a e b são iguais.

134 Consequência desta definição. — Todo número positivo é maior que zero.

Seja o número positivo 100, e seja 100 0, porque $100 - 0 = 100$ é positivo.

Todo número negativo é menor que zero. Seja o número negativo 1000, e seja 000 0, porque $0 - 1000 = -1000$ é negativo.

Se a e b são dois números negativos, o maior é o que tem o menor valor absoluto.

Seja a e b dois números negativos 10 e 1000, e seja 1000 — 10 = 990, porque a diferença 10 — 1000 = -990 é negativa.

Observação. Em geral, quando se tem uma expressão algébrica, o sinal é negativo ou zero é menor do que o positivo.

135 Sinal de uma desigualdade. — O sinal $>$ indica que a expressão à esquerda é maior do que a expressão à direita. O sinal $<$ indica que a expressão à esquerda é menor do que a expressão à direita.

3.º Teorema. — Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $a + c > b + c$. Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a + c < b + c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $a - c > b - c$. Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a - c < b - c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $ac > bc$. Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $ac < bc$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $a/c > b/c$. Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a/c < b/c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $a + c > b + c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $a - c > b - c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $ac > bc$.

Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a + c < b + c$.

Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a - c < b - c$.

Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $ac < bc$.

Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a/c < b/c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $a/c > b/c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $a - c > b - c$.

Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a + c < b + c$.

Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a - c < b - c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $ac > bc$.

Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a/c < b/c$.

Se $a > b$, e se c for qualquer número, então $a/c > b/c$.

Se $a < b$, e se c for qualquer número, então $a - c < b - c$.

Regra Para se resolver uma desigualdade de 1.^a ordem, é preciso:

- 1.^a Escrever as incógnitas e parênteses se houver,
- 2.^a Transferir os termos desconhecidos para o 1.^o membro e os conhecidos para o 2.^o

3. Reduzir os termos conhecidos e por a incógnita em factor comum.

4.^a Dividir os 2 membros pelo coeficiente da incógnita.
Ver as operações e sempre se bem o sinal dos multiplicadores e a desigualdade mudam ou não para a direita.

5.^a Teorema. Se se multiplicar o membro a membro duas desigualdades de mesmo sentido, o resultado é uma desigualdade de mesmo sentido.

Se se multiplicar o membro a membro duas desigualdades de sentido contrário, o resultado é uma desigualdade de mesmo sentido que a multiplicando.

6.^a Segun. as desigualdades:

$$a > b, a' > b', a'' > b''$$

Faamos:

$$a = b + e,$$

$$a' = b' + e',$$

$$a'' = b'' + e''$$

1.^a resolve-se que

$$a + a' + a'' > b + b' + b'' + e + e' + e''$$

Se se tirar $e + e' + e''$ o segundo membro diminui de $e + e' + e''$ logo

$$a + a' + a'' > b + b' + b''$$

2.^a Segun. as duas desigualdades

$$a > b \text{ e } c < d$$

Temos

$$a - c > b - d$$

Com oitavo a segunda desigualdade pôde escrever-se $a > c$, e acrescentando-a à primeira, temos (13.^a + 1.^a)

$$a + a > b + c \text{ ou } a - c > b - d$$

13.^a Teorema. Multiplicando-se membro a membro duas desigualdades de mesmo sentido e de membros positivos, resulta outra desigualdade de mesmo sentido.

Seja

$$a > b, a' > b', a'' > b''$$

Faamos

$$a = b + c, a' = b' + c', a'' = b'' + c''$$

Multiplicando membro a membro temos:

$a \cdot a' = (b + c)(b' + c') = bb' + bc' + b'a' + c'c' = bb' + c'c' +$ uma soma de termos dos positivos, pois que b, b', c', c' são todos positivos.

1.^a se deduz:

$$aa' > bb' + cc'$$

observações 1. Se os sinais fossem diferentes ou iguais seria diferente para o resultado.

II. Se os dois membros de uma desigualdade forem positivos, pôde-se elevá-los a uma potência n , se n é natural e $n > 1$, a desigualdade é a mesma.

III. Se os dois membros de uma desigualdade forem negativos, pôde-se, sem mudar o sentido da desigualdade, elevar a qualquer potência ímpar, elevando-os a uma potência par, a desigualdade muda de sentido.

EXERCÍCIOS

995. Resolver a desigualdade

996. Achar os valores inteiros de x que verificam a desigualdade

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} > 15 + \frac{7x}{10}$$

997. Achar os valores inteiros e positivos de x que verificam a

998. Achar os valores inteiros de x que verificam a

999. Achar os valores inteiros de x que verificam a

$$5x - 7x + 5 - 15x + 1 - 10x > 0$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{5}{6} + \frac{11x}{12} < \frac{7x}{18} + 1$$

1000. Achar os valores inteiros de x que verificam a

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} > 15 + \frac{7x}{10}$$

1001. Entre que limite pode variar x para satisfazer ao mesmo tempo

$$x-11 < \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad 3x-11$$

1002. Mesma pergunta por

$$\frac{x-2}{2} - \frac{2-x}{3} < \frac{5x-1}{7} \rightarrow 1 \quad \text{e}$$

1003. Provar que as desigualdades $x^2+y^2 \geq 2xy$ e $x^2+y^2 > xy$ são sempre

1004. Provar que a desigualdade

é sempre verificada

1005. provar que $\frac{n+1}{n}$ é sempre verdadeira isto é, que a

média aritmética de 2 números é superior ou igual à sua média geométrica

1006. Verificar a desigualdade

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc.$$

1007. Verificar a desigualdade

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) \geq 3abc$$

1008. Sobre isto que

mostrar que

ANÁLISE DO 1º

ANÁLISE INDETERMINADA DO PRIMEIRO GRAU

(Ver entre nós o do na Aritmética e sup. mestre, nº 3317, 3318 e 3319.)

Resolução da equação $ax+by=c$.

30. Quando houver mais de duas incógnitas do que equações, na forma geral uma equação de graus n.º 1.º. A análise indeterminada procura achar as raízes inteiras positivas, ou nulas do problema.

O caso mais simples é o da equação de 1º grau a 2 incógnitas, ou seja:

equação podemos supor sempre a, b, c e primos entre si, se não o fossem, dividiríamos os dois membros da equação pelo máximo divisor comum de a, b e c .

Teorema. Simplificando a mais possível a equação $ax+by=c$ e b não forem primos entre si a equação não

pois, seja d um divisor de a e b que não divida c ; p e q os quocientes de a e b por d ; temos

$$a=pd \quad \text{e} \quad b=qd$$

equação

$$ax+by=0$$

ou seja:

$$px+qy=\frac{c}{d}.$$

x e y forem inteiros, o 1º membro desta equação é inteiro, pode igualar o 2º membro, que é fracionário, c/d , e x e y não podem ser inteiros e resolver a equação dada.

Teorema. Se a e b forem duas soluções inteiras da $ax+by=0$, e k um inteiro qualquer, a equação será satisfeita também pelos valores

$$x=am \quad \text{e}$$

$$y=b-n.$$

efeito, temos:

$$am+bn=c.$$

Para tirar-se:

$$x=\frac{c-by}{a}=\frac{am+bn-by}{a}=m+\frac{n-y}{a}.$$

$$\frac{n-y}{a}=t$$

ou qualquer

$$x = m + bt,$$

$$y = n - at.$$

Formulas que dão para a equação $ax + by = c$ uma infinidade de soluções inteiras, quando

$$c = 1, 2, 3, \dots$$

1.ª 2.ª Notas. — Na análise indeterminada cada vez que se muda o valor de t obtém-se uma solução em x e y . Cada vez que se muda o valor de t , obtém-se uma solução, $x = m$, $y = n$, as outras facilmente se obtêm pelas formulas

$$x = m + bt,$$

$$y = n - at,$$

com que se faz sucessivamente

$$t = 1, 2, 3, \dots$$

3.ª As formulas

$$x = m + bt,$$

$$y = n - at,$$

resolvem em soluções inteiras a equação $ax + by = c$.

Quando c é qualquer número inteiro positivo ou negativo e as formulas não resolvem, não são aplicáveis.

$$x = m + bt,$$

$$y = n - at,$$

Se c for qualquer número inteiro, positivo ou negativo, e as formulas não resolvem, não são aplicáveis.

$$x = m + bt,$$

$$y = n - at,$$

Uma solução inteira se logo faz, se $y = 0$, pois

$$x = c \text{ e } y = 0.$$

Portanto, na análise indeterminada procura-se uma equação em x e y com coeficientes a ou b seja 1. Então, dá-se o valor 0 á incógnita de coeficiente diferente de 1, e a outra incógnita varia o número inteiro t .

Casos práticos de análise indeterminada. — 1.ª Achar as soluções inteiras da equação

$$4x + 13y =$$

Temos

$$x = \frac{3 - 13y}{4} = -3y + \frac{3 - y}{4}$$

1.ª 2.ª

$$x = \frac{3 - 13y}{4} = -3y + \frac{3 - y}{4}$$

$$x = -3y + \frac{3 - y}{4}$$

1.ª

1.ª 2.ª 3.ª 4.ª 5.ª 6.ª 7.ª 8.ª 9.ª 10.ª 11.ª 12.ª 13.ª 14.ª 15.ª 16.ª 17.ª 18.ª 19.ª 20.ª 21.ª 22.ª 23.ª 24.ª 25.ª 26.ª 27.ª 28.ª 29.ª 30.ª 31.ª 32.ª 33.ª 34.ª 35.ª 36.ª 37.ª 38.ª 39.ª 40.ª 41.ª 42.ª 43.ª 44.ª 45.ª 46.ª 47.ª 48.ª 49.ª 50.ª 51.ª 52.ª 53.ª 54.ª 55.ª 56.ª 57.ª 58.ª 59.ª 60.ª 61.ª 62.ª 63.ª 64.ª 65.ª 66.ª 67.ª 68.ª 69.ª 70.ª 71.ª 72.ª 73.ª 74.ª 75.ª 76.ª 77.ª 78.ª 79.ª 80.ª 81.ª 82.ª 83.ª 84.ª 85.ª 86.ª 87.ª 88.ª 89.ª 90.ª 91.ª 92.ª 93.ª 94.ª 95.ª 96.ª 97.ª 98.ª 99.ª 100.ª

$$t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1.ª 2.ª Achar as soluções inteiras da equação

$$7x + 12y = 15.$$

1.ª 2.ª 3.ª 4.ª 5.ª 6.ª 7.ª 8.ª 9.ª 10.ª 11.ª 12.ª 13.ª 14.ª 15.ª 16.ª 17.ª 18.ª 19.ª 20.ª 21.ª 22.ª 23.ª 24.ª 25.ª 26.ª 27.ª 28.ª 29.ª 30.ª 31.ª 32.ª 33.ª 34.ª 35.ª 36.ª 37.ª 38.ª 39.ª 40.ª 41.ª 42.ª 43.ª 44.ª 45.ª 46.ª 47.ª 48.ª 49.ª 50.ª 51.ª 52.ª 53.ª 54.ª 55.ª 56.ª 57.ª 58.ª 59.ª 60.ª 61.ª 62.ª 63.ª 64.ª 65.ª 66.ª 67.ª 68.ª 69.ª 70.ª 71.ª 72.ª 73.ª 74.ª 75.ª 76.ª 77.ª 78.ª 79.ª 80.ª 81.ª 82.ª 83.ª 84.ª 85.ª 86.ª 87.ª 88.ª 89.ª 90.ª 91.ª 92.ª 93.ª 94.ª 95.ª 96.ª 97.ª 98.ª 99.ª 100.ª

$$x = \frac{15 - 12y}{7} = 2 - y + \frac{1 - 5y}{7}.$$

1.ª 2.ª 3.ª 4.ª 5.ª 6.ª 7.ª 8.ª 9.ª 10.ª 11.ª 12.ª 13.ª 14.ª 15.ª 16.ª 17.ª 18.ª 19.ª 20.ª 21.ª 22.ª 23.ª 24.ª 25.ª 26.ª 27.ª 28.ª 29.ª 30.ª 31.ª 32.ª 33.ª 34.ª 35.ª 36.ª 37.ª 38.ª 39.ª 40.ª 41.ª 42.ª 43.ª 44.ª 45.ª 46.ª 47.ª 48.ª 49.ª 50.ª 51.ª 52.ª 53.ª 54.ª 55.ª 56.ª 57.ª 58.ª 59.ª 60.ª 61.ª 62.ª 63.ª 64.ª 65.ª 66.ª 67.ª 68.ª 69.ª 70.ª 71.ª 72.ª 73.ª 74.ª 75.ª 76.ª 77.ª 78.ª 79.ª 80.ª 81.ª 82.ª 83.ª 84.ª 85.ª 86.ª 87.ª 88.ª 89.ª 90.ª 91.ª 92.ª 93.ª 94.ª 95.ª 96.ª 97.ª 98.ª 99.ª 100.ª

$$\frac{1 - 5y}{7} = t, (t, \text{ sendo um inteiro qualquer}).$$

$$1 - 5y = 7t$$

$$-5y = 7t - 1$$

1.ª 2.ª 3.ª 4.ª 5.ª 6.ª 7.ª 8.ª 9.ª 10.ª 11.ª 12.ª 13.ª 14.ª 15.ª 16.ª 17.ª 18.ª 19.ª 20.ª 21.ª 22.ª 23.ª 24.ª 25.ª 26.ª 27.ª 28.ª 29.ª 30.ª 31.ª 32.ª 33.ª 34.ª 35.ª 36.ª 37.ª 38.ª 39.ª 40.ª 41.ª 42.ª 43.ª 44.ª 45.ª 46.ª 47.ª 48.ª 49.ª 50.ª 51.ª 52.ª 53.ª 54.ª 55.ª 56.ª 57.ª 58.ª 59.ª 60.ª 61.ª 62.ª 63.ª 64.ª 65.ª 66.ª 67.ª 68.ª 69.ª 70.ª 71.ª 72.ª 73.ª 74.ª 75.ª 76.ª 77.ª 78.ª 79.ª 80.ª 81.ª 82.ª 83.ª 84.ª 85.ª 86.ª 87.ª 88.ª 89.ª 90.ª 91.ª 92.ª 93.ª 94.ª 95.ª 96.ª 97.ª 98.ª 99.ª 100.ª

$$\frac{1 - 2t}{5} = s, (s, \text{ sendo outro inteiro qualquer}).$$

$$1 - 2t = 5s$$

$$-2t = 5s - 1$$

$$-2t = 5s - 1$$

$$t = 1 - 5s$$

e por substituições sucessivas

$$z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{10r}{2} = -2 + 5r,$$

$$y = \frac{1}{5} + \frac{14}{5} - 7r = 3 - 7r,$$

As soluções inteiras são, pois, dadas pelas formulas

$$x = -3 + 12r$$

onde se faz sucessivamente

Nota — Há vantagem em começar o cálculo pela incógnita, x ou y , que tem o menor coeficiente: acaba mais depressa.

145. Regra — Para se achar as soluções inteiras da equação $ax + by = c$ é preciso

1.ª Resolver a equação em relação a x e efetuar a divisão, tanto quanto possível, no segundo membro;

2.ª Igualar a fração do quociente no segundo membro a uma indeterminada z ; resolver esta equação entre z e y , em relação a y e efetuar a divisão, tanto quanto possível, no segundo membro;

3.ª Igualar a fração do quociente no segundo membro a uma indeterminada s ; resolver esta equação entre s e z , em relação a z , e efetuar a divisão tanto quanto possível;

4.ª Continuar assim por diante até não se obter mais parte fracionária no quociente;

5.ª Por substituições sucessivas resolvem-se finalmente z e y em relação à última indeterminada escolhida.

146. Teorema. — Se a e b forem primos entre si na equação $ax + by = c$, simplificada o mais possível, há uma infinidade de soluções inteiras positivas ou negativas.

Com efeito, na 1.ª operação do método iludido, é preciso dividir o maior coeficiente das incógnitas pelo menor, na 2.ª, o menor coeficiente pelo resto da divisão, na 3.ª, o 1.º resto pelo 2.º e assim por diante, os 2 coeficientes de x e y são tratados pelo processo do m. d. c., como são primos entre si,

há fatalmente o resto r , que servirá de coeficiente a x das indeterminadas introduzidas do resto r e z a y e uma solução inteira $x = 142$, $y = 9$, e portanto, há um de de soluções inteiras, positivas ou negativas.

147. Caso de soluções inteiras e positivas. Às vezes as propriedades comportam apenas soluções positivas, então os valores da última indeterminada de modo a se chegar a a esta condição.

Se a 3 incógnitas, 3 eq. a- a 4 incógnitas, etc., reduzir-se o sistema por eliminação, ficando sempre uma equação a duas incógnitas que se resolve

47. Caso em que houver mais de uma incógnita a mais do que o número das equações.

Se resolver a equação

1.ª resolvendo em relação a y , que tem o menor coeficiente,

$$y = \frac{48 - 8x - 7z}{5} = 9 - x - z$$

$$\frac{3 - 3x - 2z}{5} = t \quad (t, \text{ sendo, um inteiro qualquer})$$

resolvendo em relação a z , que tem o menor coeficiente.

Façamos também

$$1 - x - t = s \quad \text{sendo } s, \text{ o inteiro qualquer,}$$

$$x = 1 - t - 2s$$

$$y = \frac{48}{5} - \frac{8}{5}x - \frac{16}{5}z = \frac{48}{5} - \frac{8}{5}(1 - t - 2s) - \frac{16}{5}t = 9 + 3t - s,$$

အနုပညာရှင်တို့၏ အဖွဲ့အစည်းများ

$$f^2 = 2 + f^2 - 2g.$$

64. For each of the following, give the value of the function at the given point.

48 Observação: Em alguns casos de erro, a máquina pode não reconhecer o código de barras e o usuário deve verificar se o código de barras está corretamente impresso e se a máquina está configurada corretamente.

At the end of the 19th century, the first attempts were made to

BAK KILGUS SCOTT & ASSOCIATES INC. TEL: 301-281-0303
400 PRINCE STREET

Aclarar em português as frases das colunas

1005 2x-5y=30

1010 $\Sigma x^2 - 3x\bar{y} = 59$

1011 $4x + 7y = 28$

1012. $121x - 200y = 500$

1013. $\frac{5}{2} - 2\sqrt{11} + 1.5$

1014 2x 24=60

1016. $3x + 4y = 40$

1016 $5x^2 + 12y = 45$

1017 $2x-1, y=52$

1016, \$4-57019

Achar as soluções inteiras e positivas das equações que vão do
 nº 2412 até 2408

Problemas

[illegible][illegible][illegible]

1022. Uma das seguintes afirmações é incorreta em relação aos primeiros milhões de anos das sociedades humanas: 10. em 1 milhão de anos de cada espécie?

1023. Adiant 3 números até que o ex. 1022 dê 17 e depois a primeira soma 26 vezes o segundo (nen 7)

1024. João e Luiz têm, juntos, 50\$ a quantia do Luiz é a metade por 8 e a de João por 12. Quanto possui cada um?

1028 Achar, a o não era tão que o expressar da sua alma si era
de uma liberdade sua

1020 Vin a u tres pousos e nos a u hores d'ella e na pousada
e a u hores d'ella e na pousada e a u hores d'ella e na pousada

1087. Uma quadrilátero inscrita O círculo de Y não a 18, a 38
e a grande e o ponto tal I no círculo de 100\$. O círculo grande de
O de 20 a distância de Y. 100?

[illegible][illegible][illegible]

1932 Um homem compra 100 ações por 00\$ e cinco dias
 n 5º vende um caixa de 100 ações a \$ cada uma e compra a \$050 cada uma
 Quantas ações compra de cada assente ?

1032. Achuar dois números das que a diferença entre 7 vezes o 1.º e 11 vezes o 2.º seja 21

1083 Um livro com menos de 250 páginas, contendo-as 1 a 7
sobre as 7 e contendo as 11 a 1 sobre as 7, e por páginas em 2

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

CAPÍTULO I. — MATH.

I. Potências

1. Potência é o produto de um número a por si mesmo m vezes, onde m é um número inteiro positivo. Se a for negativo, a potência será negativa se m for ímpar e positiva se m for par.

Desta definição resulta que

$$a^2 = a \cdot a \quad \text{e} \quad a^3 = a \cdot a \cdot a$$

150. Teorema. — A potência m^{a} de um produto obtém-se elevando-se cada fator ao m^{a} e multiplicando os resultados.

Seja, por exemplo, elevar ab à quarta potência

Temos, por definição:

$$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab$$

Corolário I. — Para se obter o quadrado de um monômio eleva-se o coeficiente ao quadrado e multiplica-se os expoentes de cada letra pelo 2.

Temos, com efeito:

$$(3a^2b^3c)^2 = 9a^4b^6c^2 \quad \text{e} \quad (-2a^3b^2c)^2 = 4a^6b^4c^2$$

Corolário II. — Para se obter o cubo de um monômio eleva-se o coeficiente ao cubo e multiplica-se os expoentes de todas as letras pelo 3.

Com efeito, todo-se observa:

$$(-2a^2b^3c)^3 = (-8)(a^2)^3(b^3)^3(c^3)^3 = -8a^6b^9c^9$$

1. 1.º Teorema. — Para se elevar uma fração a qualquer potência, eleve-se cada termo a essa potência.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$$

2.º Teorema. — A raiz n^{a} de um número é a mesma que a raiz n^{a} de cada termo da fração.

Por exemplo, a raiz 4^{a} de a^4 é a , porque $(a^4)^4 = a^{16}$ e a definição resulta que:

$$(\sqrt[4]{a})^4 = a, \quad (\sqrt[4]{a^4})^4 = a^4, \quad (\sqrt[4]{a^4})^4 = a^4$$

3.º Teorema. — A raiz n^{a} de um número é a mesma que a raiz n^{a} de cada termo da fração.

Por exemplo, a raiz 4^{a} de a^4 é a , porque $(a^4)^4 = a^{16}$ e a definição resulta que:

$$(\sqrt[4]{a})^4 = a, \quad (\sqrt[4]{a^4})^4 = a^4, \quad (\sqrt[4]{a^4})^4 = a^4$$

Corolário II. — A raiz n^{a} de um número é a mesma que a raiz n^{a} de cada termo da fração.

Por exemplo, a raiz 4^{a} de a^4 é a , porque $(a^4)^4 = a^{16}$ e a definição resulta que:

$$(\sqrt[4]{a})^4 = a, \quad (\sqrt[4]{a^4})^4 = a^4, \quad (\sqrt[4]{a^4})^4 = a^4$$

Corolário III. — Para se obter a raiz n^{a} de uma fração, eleve-se a raiz n^{a} de cada termo da fração.

Por exemplo, a raiz 4^{a} de $\frac{a}{b}$ é $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$

porque

$$\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}\right)^4 = \frac{a}{b}$$

Corolário IV. — A raiz quadrada de um número negativo é imaginária.

Seja o número negativo $-a^2$. A raiz quadrada desse número não pôde ser nem $+a$ nem $-a$, porque os quadrados destes dois números são $+a^2$ e não $-a^2$.

Diz-se, portanto, que a raiz quadrada de um número negativo é imaginária.

As expressões $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-100}$ são imaginárias. Seus quadrados são respectivamente: -1 , -9 , -25 , -100 .

152. Teorema. — Para se obter a raiz n^{a} de um produto, extraia-se a raiz n^{a} de cada fator.

o índice e os expoentes de cada radical pelo produto dos índices dos outros radicais.

Sejam os dois radicais $\sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[p]{a^q}$. Estes dois radicais não mudam de valor multiplicando o índice e o expoente de cada um pelo índice do outro, les vêm a ser:

$$\sqrt[n]{a^{mq}} \text{ e } \sqrt[p]{a^{nq}}, \text{ ou ainda } \sqrt[np]{a^{mq}} \text{ e } \sqrt[np]{a^{nq}}$$

58. Produto de varios radicais. Regra. — Para *m* com varios radicais, é preciso: 1.º reduzi-los ao mesmo índice, 2.º fazer o produto das quantidades que estão debaixo dos radicais, 3.º dar ao produto o radical comum.

Sejam os radicais da mesmo índice, $\sqrt[n]{a^4}$, $\sqrt[n]{b^4}$, $\sqrt[n]{a^2b^2}$, teremos

$$\sqrt[n]{a^4} \cdot \sqrt[n]{b^4} \cdot \sqrt[n]{a^2b^2} = \sqrt[n]{a^6} \cdot \sqrt[n]{b^6} \cdot \sqrt[n]{a^2b^2}$$

Com efeito, esta igualdade se transforma numa identidade elevando-se os dois membros ao cubo.

Podemos pois escrever:

$$\sqrt[n]{a^4} \cdot \sqrt[n]{b^4} \cdot \sqrt[n]{a^2b^2} = \sqrt[n]{a^6} \cdot \sqrt[n]{b^6} \cdot \sqrt[n]{a^2b^2}$$

$$\sqrt[n]{a^4} \cdot \sqrt[n]{b^4} \cdot \sqrt[n]{a^2b^2} = \sqrt[n]{a^6} \cdot \sqrt[n]{b^6} \cdot \sqrt[n]{a^2b^2}$$

$$\sqrt[n]{a^4} \cdot \sqrt[n]{b^4} \cdot \sqrt[n]{a^2b^2} = \sqrt[n]{a^6} \cdot \sqrt[n]{b^6} \cdot \sqrt[n]{a^2b^2}$$

150. Observação. — No produto de dois radicais imaginários

Fazemos o produto $\sqrt{-a^2} \cdot \sqrt{-b^2}$, escrevendo primeiro:

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{-1} \cdot a = a\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{-1} \cdot b = b\sqrt{-1}$$

O produto dos dois imaginários será

$$\sqrt{-a^2} \cdot \sqrt{-b^2} = a\sqrt{-1} \cdot b\sqrt{-1} = ab(\sqrt{-1})^2 = ab(-1) = -ab.$$

$$\sqrt{-a^2} \cdot \sqrt{-b^2} = -ab$$

$$\sqrt{-a^2} \cdot \sqrt{-b^2} = -ab$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

150. Quociente de dois radicais. Regra. — Para se dividir dois radicais, é preciso: 1.º reduzi-los ao mesmo índice, 2.º dividir a quantidade debaixo do primeiro radical por aquela do segundo, 3.º dar ao quociente o radical comum.

Com efeito, elevando à sexta potência as duas expressões

$$\sqrt[n]{a^k} \div \sqrt[n]{a^l} = \sqrt[n]{a^{k-l}}$$

$$\sqrt[n]{a^k} \div \sqrt[n]{a^l} = \sqrt[n]{a^{k-l}}$$

temos a identidade

$$\sqrt[n]{a^k} \div \sqrt[n]{a^l} = \sqrt[n]{a^{k-l}}$$

$$\sqrt[n]{a^k} \div \sqrt[n]{a^l} = \sqrt[n]{a^{k-l}}$$

$$\sqrt[n]{a^k} \div \sqrt[n]{a^l} = \sqrt[n]{a^{k-l}}$$

$$\sqrt[n]{a^k} \div \sqrt[n]{a^l} = \sqrt[n]{a^{k-l}}$$

$$\sqrt[n]{a^k} \div \sqrt[n]{a^l} = \sqrt[n]{a^{k-l}}$$

$$\sqrt[n]{a^k} \div \sqrt[n]{a^l} = \sqrt[n]{a^{k-l}}$$

101. Potência de um radical. Regra. — Para se elevar um radical a qualquer potência, eleva-se a esta potência a quantidade debaixo do radical.

Deveremos ter, por exemplo

$$\sqrt[n]{a^2}^3 = \sqrt[n]{a^2 \cdot 3} = \sqrt[n]{a^6}$$

Com efeito, temos (158)

$$(\sqrt[n]{a^2})^3 = \sqrt[n]{a^2} \cdot \sqrt[n]{a^2} \cdot \sqrt[n]{a^2} = \sqrt[n]{a^6}$$

102. Raiz de um radical. Regra. — Para se extrair a raiz *m*ª de um radical, basta multiplicar por *m* o índice deste radical. Teremos, por exemplo

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nm]{a^m}$$

Com efeito, eleve nos cada membro à potência *21*ª; o primeiro membro dá $(\sqrt[n]{a^m})^{21} = \sqrt[n]{a^{21m}}$

$$\sqrt[n]{a^m}^2 = \sqrt[n]{a^{2m}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

Conforme a regra temos

$$1^{\circ} \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$2^{\circ} \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$3^{\circ} \sqrt[n]{a^m b^p} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{p}{n}}}$$

IV Transformação das frações de denominadores irracionais.

Uma quantidade é racional quando o denominador não contém radical ou expoente fraccionário.

1.ª Regra. — Para se tornar racional o denominador de uma fração, multiplicam-se os dois termos da fração pelo radical que o denominador venha a ser racional.

Aplicações. 1.ª Tornar racional o denominador da fração

1.ª

Multiplicando-se os dois termos desta fração pelo factor $a + \sqrt{b}$, dá-se

$$\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a + \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} = \frac{a^2 - b}{a^2 - b}$$

2.ª Tornar racional o denominador da fração $\frac{m}{a + \sqrt{b}}$

Basta multiplicar os dois termos por $a - \sqrt{b}$, e vem

$$\frac{m(a - \sqrt{b})}{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} = \frac{m(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

Quantidades imaginárias

Aplicam-se às expressões imaginárias as mesmas regras que se applicam às expressões reais.

1.ª Regra. — Forma geral das imaginárias $a + bi$.

Toda a quantidade imaginária $a + bi$, póde-se reduzir á forma $a + bi$, onde a e b são números reais.

Exemplo. 2.ª

$$20(-1) = -20 = -20 + 0i$$

1.ª Regra. — Para se tornar racional o denominador de uma fração, multiplicam-se os dois termos da fração pelo radical que o denominador venha a ser racional.

1.ª Regra. — Para se tornar racional o denominador de uma fração, multiplicam-se os dois termos da fração pelo radical que o denominador venha a ser racional.

1.ª Regra. — Para se tornar racional o denominador de uma fração, multiplicam-se os dois termos da fração pelo radical que o denominador venha a ser racional.

1.ª Regra. — Para se tornar racional o denominador de uma fração, multiplicam-se os dois termos da fração pelo radical que o denominador venha a ser racional.

1.ª Regra. — Para se tornar racional o denominador de uma fração, multiplicam-se os dois termos da fração pelo radical que o denominador venha a ser racional.

1.ª Regra. — Para se tornar racional o denominador de uma fração, multiplicam-se os dois termos da fração pelo radical que o denominador venha a ser racional.

que as potências de $\sqrt{-1}$ se reproduzem periodicamente na mesma ordem a partir da quarta.

2.ª Regra. — Multiplicação dos imaginários. — Seja multiplicar $(a + bi)(c + di)$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= ac + (ad + bc)i + bdi^2$$

$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo. 3.ª Multiplicação dos imaginários. — Seja multiplicar $(a + bi)(c + di)$

$$(a + bi)(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= ac + (ad + bc)i + bdi^2$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

1.ª Regra. — Imaginários conjugados. — As quantidades $a + bi$ e $a - bi$ chamam-se imaginários conjugados uma de outra.

Dois imaginários são conjugados quando diferem apenas pelo sinal de i .

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

$$= a^2 + b^2$$

CAPÍTULO II

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRÁU

LEÇÃO I

173. Equação do segundo grau. — A equação do segundo grau é toda a equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

A forma geral da equação do segundo grau é

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

na qual a , b , c se chamam coeficientes.

A equação completa não pôde ter mais de três termos. Um termo em x^2 , um termo em x , e um termo conhecido.

A equação do segundo grau é incompleta quando não contém o termo em x , ou o termo conhecido. Lem pois uma das formas seguintes

$$ax^2 + bx = 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + c = 0.$$

Exemplos :

$$x^2 - 5x = 0. \quad x^2 - 25 = 0.$$

74. Preparação da equação. — Prepara-se a equação do segundo grau reduzindo-a à forma geral

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Para se preparar a equação do 2º grau expõem-se os denominadores e fazem-se passar todos os termos para o primeiro membro, que se reduz a uma relação de incógnita.

A equação

$$\frac{x^2}{2} - 5x + 6 = 0$$

passa à forma $ax^2 + bx + c = 0$, expondo-se os denominadores e fazendo-se depois passar os termos para o primeiro membro. Temos assim :

$$5 + 20x^2 - 80x = x - 12$$

ou então

$$20x^2 - 81x + 3 = 0$$

Os valores. Na equação do segundo grau a é sempre um número positivo, porque se não o fôsse, mudamos os sinais para lhe dar o signo mais.

II. Equações incompletas do segundo grau

Resolução da equação incompleta $ax^2 + b = 0$

— a equação pôde escrever-se :

$$x(ax + b) = 0.$$

Logo temos de anular esse produto de dois factores nos annos de cada factor por sua vez, e temos assim :

$$x = 0 \quad \text{e} \quad ax + b = 0$$

as duas raízes são

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Exemplo

Na equação $x^2 - 4 = 0$

$$x(x - 4) = 0.$$

Para anular o producto $x(x - 4)$, é preciso fazer successivamente

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x - 4 = 0.$$

$$\text{Logo} \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

76. Resolução da equação incompleta $ax^2 + c = 0$
 Quando o valor de a^2 , não for

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

as raízes são portanto :

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Para que a equação dada tenha raízes reais, é preciso que o valor de $-\frac{c}{a}$ seja positivo; isto exige que c e a sejam de sinais contrarios.

150 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRÁU

1.ª Resolva a equação $25x^2 - 0 = 0$.

Esta equação escreve-se, primeiro

$$16$$

Extraindo-se a raíz quadrada dos dois membros, vem

As raízes são :

2.ª Resolva a equação $x^2 - 4 = 0$.

Esta equação já se encontra na forma

$$x^2 = 4 \quad \pm \sqrt{(-1) \cdot 4} = \pm 2\sqrt{1}$$

Portanto

$$\pm \sqrt{-1} \cdot 4 = \pm 2\sqrt{1}$$

As raízes desta equação são 1.ª e 2.ª; vê-se logo que a e o b são iguais.

II Equação geral do segundo grau.

177 Resolução da equação completa. — Seja a forma geral

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

passando o termo conhecido para o 3.º membro, vem :

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicando os dois membros por 4a vem

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac;$$

juntando b² a cada membro, vem

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Como o 1.º membro é o quadrado de $2ax + b$ temos

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraindo a raíz quadrada dos dois membros, temos :

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

donde se tira

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DO SEGUNDO GRÁU 151

Seja a equação do segundo grau com duas raízes que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

chama-se fórmula de resolução da equação geral do segundo grau. Dá lugar à regra seguinte.

1.ª Regra para se obterem as raízes da equação do segundo grau.

1.ª Se a equação estiver na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

2.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

3.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

1.ª Se a equação estiver na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

2.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

3.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

4.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

5.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

6.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

7.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

8.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

9.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

10.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

11.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

12.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

13.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

14.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

15.ª Se a equação estiver na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, onde a, b e c são números conhecidos, e a não for zero, divida a equação por a, para obter a forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

179 2.ª Solução do Problema. — Ver a solução, transformando-se a equação completa do 2.º grau em outra incompleta, pela substituição do termo. Para conseguir o result. desejado, substitua-se $\frac{bx}{a}$ por y de uma indeterminada nova e calcule, se for o valor que deve tomar a indeterm. para que se anule o termo do 2.º grau.

Suponhamos $x = y + k$, sendo y uma nova indeterminada e k a indeterminada. Então, substitua y no valor de x na equação $ax^2 + bx + c = 0$.

$$a(y + k)^2 + b(y + k) + c = 0$$

Se anula o termo do 2.º grau

$$y^2 - 2ay + by + by + bk + ck + c = 0$$

Calculando o coef. de y , vem

$$b = 0$$

ou

Substitua k por seu valor na equação 1.ª e obtenha o resultado

$$y^2 - 2ay + c = 0$$

de y .

Então, quando y e k podem tomar valores na eq. de $x = y + k$, vem final-mente

180 Aplicação. 1.ª Resolver a equação $x^2 -$

Para identificar em duas equações

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0,$$

é preciso ter

$$a=1, \quad b=-9 \quad e \quad c=20$$

Levando estes valores na fórmula de resolução

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

temos

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1}$$

As raízes da equação dada são pois:

$$x =$$

Resolver a equação

$$x^2 - 1$$

$$x = 1$$

Is de expulsar os termos anadidos e fazer passar todos os para o primeiro membro obtém-se

identificar esta equação com a equação geral

$$b = -24 \quad e \quad c = 5$$

$$x^2 - 24x + 5 = 0$$

$$x =$$

$$m^2 - (m+n)x + mn = 0$$

$$b = -(m+n) \quad e \quad c = mn$$

$$x =$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4mn} \quad \frac{-(m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4mn}}{2mn}$$

As raízes são, pois:

$$x' = \frac{(m+n) + (m-n)}{2mn} = \frac{2m}{2mn}$$

$$x'' = \frac{(m+n) - (m-n)}{2mn} = \frac{2n}{2mn} = \frac{1}{m}$$

4^o Resolver diretamente a equação $x^2 + 10x + 21 = 0$.

O primeiro membro da equação

$$x^2 + 10x = -21,$$

representa os dois primeiros termos do quadrado de $x+5$, acrescentando 25 aos dois membros, teremos

$$x^2 + 10x + 25 = -21 + 25$$

ou

$$(x+5)^2 = 4$$

A extração da raíz quadrada fornece

$$x+5 = \pm 2$$

logo

$$x = -5 \pm 2$$

As raízes são, pois :

$$5^{\text{a}} x = -3 \quad \text{e} \quad x'' = -2 - 5 = -7$$

14. — Caso de b par ou resolução de $ax^2 + 2b'x + c = 0$.

Seja a equação

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

na qual b é par e se representa por $2b'$.

A fórmula de resolução da equação geral dá :

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}$$

ou dividindo tudo por 2

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

Essa fórmula é mais simples, e deve aplicar-se todas as vezes que b for par.

Aplicações — Resolver

$$x^2 - 8x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

Tomos pela fórmula de x'

$$1^{\text{o}} \quad x = 4 \pm \sqrt{16 - 16} = 4 \pm 0,$$

logo

$$x' = 4 + 0 = 4 \quad \text{e} \quad x'' = 4 - 0 = 4$$

$$2^{\text{o}} \quad x = 7 \pm \sqrt{49 - 48} = 7 \pm 1$$

logo

$$x = 7 + 1 = 8 \quad \text{e} \quad x'' = 7 - 1 = 6.$$

IV. Discussão sumária da fórmula de resolução.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ sejam reais, é preciso que sejam reais ; para isso é preciso que a expressão sob a raíz quadrada de $b^2 - 4ac$, o que exige que $b^2 - 4ac$ seja positivo.

As raízes da equação do segundo grau são pois reais e distintas se $b^2 - 4ac$ for positivo, são imaginárias se $b^2 - 4ac$ for negativo.

Além disso, se a quantidade $b^2 - 4ac$ for nula, é visível que

$$x' \text{ e } x'' \text{ são iguais a } -\frac{b}{2a}$$

Em resumo, se tivermos :

1^o $b^2 - 4ac > 0$ as raízes são reais e distintas,

2^o $b^2 - 4ac = 0$ as raízes são iguais,

3^o $b^2 - 4ac < 0$ as raízes são imaginárias.

A quantidade $b^2 - 4ac$ se chama *resultante* da equação do 2^o grau.

183. Aplicações. — Ser. resolver as equações seguintes, e dizer se as raízes são reais, ou se são imaginárias.

$$1^{\text{o}} \quad x^2 - 22x + 120 = 0$$

$$2^{\text{o}} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$3^{\text{o}} \quad x^2 - 10x + 25 = 0$$

1^o A primeira equação dá :

$$x = 10 \pm \sqrt{100 - 480} = 10 \pm 20$$

Como a quantidade de $b^2 - 4ac$ é positiva, a primeira equação tem raízes reais e distintas.

2^o Na segunda temos

$$x = 2 \pm \sqrt{16 - 16} = 2 \pm 0$$

Neste caso as raízes são iguais

3^o Na terceira equação. temos

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 25} = 5 \pm 0$$

Esta equação tem, pois, raízes imaginárias.

Se $x^2 - px + q = 0$ for equação de 2º grau, então:

1328. $x^2 - px + q = 0$

1329. $x^2 - px + q = 0$

1330. $x^2 - px + q = 0$

1331. $x^2 - px + q = 0$

1332. $x^2 - px + q = 0$

1333. $x^2 - px + q = 0$

1334. $x^2 - px + q = 0$

1335. $x^2 - px + q = 0$

1336. $x^2 - px + q = 0$

1337. $x^2 - px + q = 0$

1338. $x^2 - px + q = 0$

1339. $x^2 - px + q = 0$

1340. $x^2 - px + q = 0$

1341. $x^2 - px + q = 0$

1342. $x^2 - px + q = 0$

1343. $x^2 - px + q = 0$

1344. $x^2 - px + q = 0$

1345. $x^2 - px + q = 0$

1346. $x^2 - px + q = 0$

1347. $x^2 - px + q = 0$

1348. $x^2 - px + q = 0$

1349. $x^2 - px + q = 0$

1350. $x^2 - px + q = 0$

1351. $x^2 - px + q = 0$

1352. $x^2 - px + q = 0$

1353. $x^2 - px + q = 0$

1354. $x^2 - px + q = 0$

1355. $x^2 - px + q = 0$

CAPÍTULO II.

PROPRIEDADES E DISCUSSÃO DAS RAÍZES DA EQUAÇÃO
DE SEGUNDO GRAU

I. Propriedades das raízes.

84. Teorema — A soma das raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

é igual ao coeficiente de x tomado em sinal contrário e dividido pelo coeficiente de x^2 .

Deverá ser

em efeito tem-se

$$x_1 + x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Quando membro a membro, vem:

135. Teorema — Se x_1 e x_2 são as raízes da equação de 2º grau, então a soma das raízes é igual ao coeficiente de x tomado em sinal contrário e dividido pelo coeficiente de x^2 .

em efeito, tem-se

136. Teorema — Se x_1 e x_2 são as raízes da equação de 2º grau, então o produto das raízes é igual ao termo independente dividido pelo coeficiente de x^2 .

87. Teorema — O primeiro membro da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é igual a $(x - x_1)(x - x_2)$.

em efeito, o polinômio $ax^2 + bx + c$ é divisível por $x - x_1$ e $x - x_2$ e podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)Q$$

Ora, os dois membros desta identidade são do mesmo grau e os termos de mesmo grau devem ser iguais dois a dois, por-
tanto

$$ax^2 = ax^2 \quad \text{lato é} \quad a = a$$

logo

$$bx = (x - x_1)(x - x_2)Q$$

88. — A diferença das raízes $x_1 - x_2$ da equação de 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

é dada por

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

em efeito, tem-se

II. Aplicações

189. Achar a soma e o produto das raízes de cada uma das equações seguintes

$$1^{\text{a}} 4x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$2^{\text{a}} x^2 + 11x + 28 = 0$$

Conforme os teoremas 84 e 85, temos:

$$1^{\text{a}} x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{7}{4} \quad \text{e} \quad x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{2}{4}$$

$$2^{\text{a}} x' + x'' = \frac{-b}{a} = -11 \quad \text{e} \quad x'x'' = \frac{c}{a} = 28$$

190. Dadas as equações de raízes x' e x''

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

sem resolver, os sinais das raízes

achamos a equação o produto das raízes c/a , e se este for positivo, as raízes são ambas positivas ou ambas negativas; se for negativo, as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

Nas equações seguintes, temos

$$x'x'' = -4 \quad \text{e} \quad x' + x'' = -3$$

Como o produto das raízes é negativo, as duas raízes são de sinais contrários.

Como a soma é negativa, segue-se que a maior em valor absoluto é negativa.

191. Generalização — Discutir a priori os sinais das raízes de uma equação do segundo grau.

Temos dois casos: $a > 0$ e $a < 0$.

1.º Caso, $a > 0$. — Se $c/a > 0$, o produto das raízes é positivo; as raízes são ambas positivas ou ambas negativas.

Se $c/a < 0$, o produto das raízes é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

Se $b/a > 0$, a soma das raízes é positiva; as raízes são ambas positivas.

Se $b/a < 0$, a soma das raízes é negativa; as raízes são ambas negativas.

Se $b/a > 0$ e $c/a < 0$, a soma das raízes é positiva e o produto é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

2.º Caso, $a < 0$. — Neste caso, é útil formar a equação auxiliar, sempre positiva. As raízes são sempre reais.

Se $c/a > 0$, o produto das raízes é positivo; as raízes são ambas positivas ou ambas negativas.

Se $b/a > 0$, a soma das raízes é positiva; as raízes são ambas positivas.

Se $b/a < 0$, a soma das raízes é negativa; as raízes são ambas negativas.

Se $c/a < 0$, o produto das raízes é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

Se $b/a > 0$ e $c/a < 0$, a soma das raízes é positiva e o produto é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

Se $b/a < 0$ e $c/a < 0$, a soma das raízes é negativa e o produto é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

Se $b/a > 0$ e $c/a > 0$, a soma das raízes é positiva e o produto é positivo; as raízes são ambas positivas.

Se $b/a < 0$ e $c/a > 0$, a soma das raízes é negativa e o produto é positivo; as raízes são ambas negativas.

Se $b/a > 0$ e $c/a > 0$, a soma das raízes é positiva e o produto é positivo; as raízes são ambas positivas.

Se $b/a < 0$ e $c/a > 0$, a soma das raízes é negativa e o produto é positivo; as raízes são ambas negativas.

Se $b/a > 0$ e $c/a < 0$, a soma das raízes é positiva e o produto é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

Se $b/a < 0$ e $c/a < 0$, a soma das raízes é negativa e o produto é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

Se $b/a > 0$ e $c/a < 0$, a soma das raízes é positiva e o produto é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

Se $b/a < 0$ e $c/a < 0$, a soma das raízes é negativa e o produto é negativo; as raízes são de sinais contrários, a maior em valor absoluto é a negativa.

1.2 PROPRIEDADES E DISCUSSÃO DAS RAÍZES

1ª A soma das raízes é $5 + 7 = 12$ e o produto é $5 \cdot 7 = 35$ a equação procurada é $x^2 - 12x + 35 = 0$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

2ª A soma e o produto das raízes são $\frac{18}{5}$ e $\frac{6}{5}$ a equação procurada é

$$x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{6}{5} = 0 \quad \text{ou} \quad 5x^2 - 18x + 6 = 0$$

3ª Podemos formar a terceira equação como as duas anteriores. Podemos também a partir do teorema (37).

Teorema

$$a(x-x')(x-x'') = (x-a) \left(x + \frac{b}{a} + x'' - \frac{19a}{b} - \frac{10}{8} = 0 \right)$$

ou seja

$$5x^2 - 18x - 23 = 0$$

4ª Achar uma equação de raízes inversas das raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Se x' e x'' forem as raízes da equação dada, e se y' e y'' forem as da equação procurada, teremos

$$y' = \frac{1}{x'} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{1}{x''}$$

Como se deriva

$$\frac{1}{y'} = x' \quad \text{e} \quad \frac{1}{y''} = x''$$

$$\frac{1}{y'} = x' \quad \text{e} \quad \frac{1}{y''} = x''$$

Mas, na equação dada, temos $ax^2 + bx + c = 0$

$$x'^2 + x''^2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x'x'' = -\frac{c}{a}$$

As igualdades proporcionais vêm a ser

$$\frac{x'^2}{x'x''} = \frac{x''^2}{x'x''} = \frac{-\frac{b}{a}}{-\frac{c}{a}} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x''} = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x'} = \frac{b}{c}$$

A equação procurada é

$$cx^2 - bx + a = 0$$

1.3 Achar as condições para que duas equações de segundo grau tenham as mesmas raízes

Se as equações

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{e} \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

tem as mesmas raízes, cada equação fornece $x' + x''$ e $x'x''$.

$$\frac{-b}{a} = \frac{-b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

2º $a < 0$ Quando a é negativo, a quantidade $4ac +$

o portanto, o numerador das raízes, $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ terá o s

1.º

2.º $a = 0$. Quando $a = 0$, o radical vem a ser $\sqrt{b^2}$ ou b , e a equação (2) dá: $x = \frac{-b \pm b}{2a}$, uma raiz val

ou a outra é ∞ . Quando $a = 0$, a equação (1) se reduz a $ax^2 + bx = 0$, equa

202. — Segundo caso. $b^2 - 4ac = 0$. As raízes sã

$$\frac{-b \pm 0}{2a}$$

As raízes são iguais e têm o sinal contrario de b .

203. Terceiro caso. $b^2 - 4ac < 0$. As raízes, neste caso, são imaginárias.

Pelas propriedades das raízes de uma equação de 2.º grau, as raízes debaixo da forma

Conhecendo-se as raízes

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

Façamos

$$\alpha = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \beta = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

teremos

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

ou

$$\alpha' = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad \alpha'' = \alpha - \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

Casos particulares

1.º $a = 0$. Quando $a = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tem uma raiz nula quando $a = 0$ tem duas raízes infinitas se $a = b = 0$ ou tem uma infinidade de raízes se $b = c = 0$ a tem outras, façamos,

$$x = \frac{1}{y}$$

Nesta igualdade vemos que se x for nulo, y é infinito, porque o quociente de 1 por y não se pôde anular senão quando y é infinito, do mesmo modo, se x for infinito, y é nulo, porque o quociente de 1 por y não pôde ser infinito. Portanto não pôde ser infinitamente pequeno ou nulo. Portanto, mas que a um valor nulo de y corresponde um valor procam, etc

Substituindo x por $\frac{1}{y}$ na equação geral, ela vem a ser

$$\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0 \quad \text{ou} \quad cy^2 + by + a = 0$$

Assim as duas equações correlatas são

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{e} \quad cy^2 + by + a = 0$$

Quando $a = 0$, a equação em y tem uma raiz nula (201): e em x tem, pois, uma raiz infinita

Se $a = b = 0$, a equação em y se reduz a $cy^2 = 0$ e as duas são nulas; portanto, a equação em x tem 2 raízes in-

to $a = b = c = 0$, a equação geral só tem o

$$0x^2 + 0x + 0 = 0.$$

Esta ultima fica satisfeita seja qual for o valor de x ; pelo do segundo grau tem pois uma infinidade

$$0x^2 + 0x + 0 = 0$$

1. - Resolva as equações e raízes os números seguintes

1386.		1393	
1387 10		1394	
1388 $-40, -$		1395	
1389		1396	
1390		1397	
1391			
1392			

Na equação $x^2 - ax + 2600 = 0$ qual deve ser o valor de a para que tenhamos:

1393. $x = 20$	1404. $x = 1/x^2$
1394. $x = 70$	1405. $x^2 + x^3 = 100$
1395. $x^2 = 100$	1406. $x = x^2 +$
1396. $x^2 = 100$	1407. $x = 1$
1397. $x^2 = 100$	1408. $x^2 = x + 1$
1398. $x^2 = 100$	1409. $1/x + 1/x^2 = 1$

2. - Resolva as equações e raízes os números seguintes

1410. $x = x^2$	1416. $x = 1$
1411. $x = x^2$	1417. $x^2 = 100$
1412. $x = x^2$	1418. $x = x^2 + 1$
1413. $x = x^2$	1419. $x = x^2 + 1$
1414. $x = x^2$	1420. $x = x^2 + 1$
1415. $x = x^2$	1421. $x = x^2 + 1$

3. - Resolva as equações e raízes os números seguintes

1422. $x^2 - 23x + 10 = 0$	1428. $x^2 - 10x + 1 = 0$
1423. $x^2 - 10x + 1 = 0$	1429. $x^2 - 10x + 1 = 0$
1424. $x^2 - 10x + 1 = 0$	

EXERCÍCIOS SOBRE AS PROPRIEDADES DAS RAÍZES

1358. $x^2 - 8x + 15 = 0$	1362. $x^2 - 5x + 6 = 0$
1359. $x^2 - 7x + 12 = 0$	1363. $x^2 - 4x + 3 = 0$
1360. $x^2 - 6x + 5 = 0$	1364. $x^2 - 3x + 2 = 0$
1361. $x^2 - 5x + 4 = 0$	1365. $x^2 - 2x + 1 = 0$
1362. $x^2 - 4x + 3 = 0$	1366. $x^2 - 3x + 2 = 0$
1363. $x^2 - 3x + 2 = 0$	1367. $x^2 - 2x + 1 = 0$

Sem resolver as equações negativas dizer a priori os sinais das raízes

1368. $x^2 - 2x + 1 = 0$	1372. $x^2 - 2x + 1 = 0$
1369. $x^2 - 17x + 60 = 0$	1373. $x^2 - 0,5x + 0,04 = 0$
1370. $x^2 + 23x - 60 = 0$	1374. $x^2 - 0,00x - 0,00 = 0$
1371. $x^2 + 17x - 60 = 0$	1375. $x^2 + (b^2 - a^2)x - a^2b^2 = 0$

Decompõe em fatores o primeiro membro de cada uma das equações seguintes

1376. $x^2 - 7x + 12 = 0$	1381. $81x^2 - 129x + 1,0 = 0$
1377. $x^2 - 2x - 120 = 0$	1382. $x^2 - 1 = 0$
1378. $x^2 - 6x + 9 = 0$	1383. $x^2 - 1 = 0$
1379. $3x^2 - 10x + 3 = 0$	1384. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$
1380. $x^2 - 50x - 51 = 0$	1385. $10x^2 - 101x + 10 = 0$

CAPÍTULO IV

SISTEMAS DE EQUAÇÕES E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRUPO

I. Resolução de alguns sistemas

207. — Resolver o sistema $x + y = 92$, $xy = 231$.
 Da primeira equação, tira-se

levando este valor para a segunda equação, ela vem a ser

$$x(92 - x) = 231 \quad \text{e,}$$

ou por raízes

$$x' = 21 \quad \text{e} \quad x'' = 11$$

Os valores de y serão:

$$y' = 92 - x' = 92 - 21 = 71$$

$$y'' = 92 - x'' = 92 - 11 = 81$$

As soluções do sistema são pois

$$1^\circ x = 21, y = 71; \quad 2^\circ x = 11 \quad \text{e} \quad y = 81$$

208. — Resolver o sistema $x^2 + y^2 = 118$, $xy = 56$.

Dividindo-se a primeira equação pela segunda, vem

terceiros

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{118}{56} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{59}{28}$$

Donde se tira

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{59}{28}$$

e portanto

$$x + y = 15 \quad (1), \quad x - y = -15 \quad (2).$$

Subtraindo da primeira equação dada duas vezes a segunda, vem também:

$$x^2 + y^2 - 2xy = 118 - 56 \cdot 2 \quad \text{ou} \quad (x - y)^2 = 1$$

Daí se deduz

$$x - y = \pm 1,$$

e portanto

$$x - y = 1 \quad (3); \quad x - y = -1 \quad (4)$$

Somando e subtraindo,

$$\begin{aligned} (1) \text{ e } (2) \text{ dão } & \quad y = 0 \\ (1) \text{ e } (4) \text{ dão } & \quad x = 7, \quad y = 8 \\ (2) \text{ e } (3) \text{ dão } & \quad x = -7, \quad y = -8 \\ (2) \text{ e } (4) \text{ dão } & \quad x = -8, \quad y = -7 \end{aligned}$$

O sistema proposto tem as quatro soluções

$$\begin{aligned} 1^\circ x = 7, y = 8; \quad 2^\circ x = -8, y = -7 \\ 3^\circ x = -7, y = -8; \quad 4^\circ x = 8, y = 7 \end{aligned}$$

209. — Achar as soluções do sistema

$$x + y = 33, \quad x^2 + y^2 = 505.$$

O valor de y , tirado da primeira equação e levado para a segunda, dá a equação

$$2x^2 - 66x + 484 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 33x + 242 = 0,$$

as raízes são:

$$x' = 22 \quad \text{e} \quad x'' = 11$$

Para estes dois valores de x , a primeira equação dá

$$y = 33 - x' = 33 - 22 = 11$$

$$y = 33 - x'' = 33 - 11 = 22$$

As soluções procuradas são:

$$1^\circ x = 22, y = 11; \quad 2^\circ x = 11, y = 22$$

210. Resolver o sistema

$$x^2 + y^2 = 48, \quad x + y = 24$$

Dividindo-se a primeira equação pela segunda, vem

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{48}{24} \quad \text{ou} \quad x - y = 2$$

As duas equações

$$x + y = 24 \quad \text{e} \quad x - y = 2,$$

$$x = 13 \quad \text{e} \quad y = 11$$

211. — Achar as soluções do sistema

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad x = by$$

$$(by)^2 - y^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{a^2}{b^2 - 1}.$$

Donde se tira

$$x^2 = 1$$

e portanto

$$x = \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

As soluções do sistema proposto são pois

$$1^{\circ} x = + \sqrt{b^2 - 1}$$

$$2^{\circ} x = - \sqrt{b^2 - 1}$$

$$3^{\circ} x = + \sqrt{b^2 - 1}$$

$$4^{\circ} x = - \sqrt{b^2 - 1}$$

Observações. — 1.ª A segunda equação podendo ser

$$\frac{x}{a} = b,$$

vê-se que se b for positiva, x e y terão o mesmo sinal; e, contrário, x e y serão de sinais contrários se b for negativa. No primeiro caso, o sistema tem duas soluções, 1.ª e 2.ª; no segundo caso, tem as soluções 3.ª e 4.ª.

2.ª É evidente que os valores achados são reais ou imaginários, conforme $b^2 - 1$ for superior ou inferior a 0.

II Equações biquadradas.

212. — Resolução da equação biquadrada. — Equação biquadrada é a que contém a quarta e a segunda potências da incógnita mais um termo conhecido. Tem a forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Para resolver esta equação fazemos

$$x^2 = y \text{ donde } x^4 = y^2$$

A equação biquadrada vem a ser

$$ay^2 + by + c = 0,$$

que tem as raízes

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo x^2 por y na equação biquadrada

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \text{tem-se} \quad ay^2 + by + c = 0$$

que tem as raízes

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aplicação. — Resolver a equação $x^4 - 100x^2 + 2025 = 0$.
Substituindo nas 4 raízes acima a por 1, b por -100 e c por 2025

$$y = \frac{-(-100) \pm \sqrt{(-100)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2025}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 8100}}{2}$$

$$y = \frac{100 \pm \sqrt{1900}}{2}$$

$$y = \frac{100 \pm 43,5}{2}$$

$$y = \frac{100 \pm 43,5}{2}$$

Teorema. A equação biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tem 4 raízes reais ou imaginárias, que se podem obter substituindo sucessivamente por x as raízes y da equação $ay^2 + by + c = 0$.

Assim, o 1.º membro anula-se pela substituição de x por x' , x'' , x''' , x'''' (ver 50).

Teorema. O trinômio biquadrado $ax^4 + bx^2 + c$ pode ser posto no produto

$$a(x - x')(x - x'')(x - x''')(x - x''''),$$

$$x = x', x = x'', x = x''', x = x''', \text{ dividindo } ax^4 +$$

As raízes da equação (1) são pois :

$$x = \frac{a}{y} = \frac{a}{\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

IV. Equações irracionais

2.7. — *Equação irracional* é a que contém a incógnita à 1.ª ou a 2.ª potência.

Para se resolver uma equação irracional, é preciso desentranhá-la das raízes e resolver a equação resultante.

Para resolver uma equação irracional é preciso isolá-la no primeiro membro e elevar os dois membros à potência indicada pelo índice da raiz.

Assim, quando se pôde desentranhar uma equação de uma raiz, por elevação à potência indicada, muitas vezes, se expõe a equação a uma ou mais potências. Por exemplo a equação

, quando se faz o cubo :

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

1.ª Ha um só radical quadrado. — Isolando o radical, a equação terá a forma :

$$\sqrt{a} = b$$

2.ª Ha dois radicais quadrados. — Isolando um radical, a equação terá a forma :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$$

3.ª Ha três radicais quadrados. — Isolando um radical, a equação terá a forma :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = d$$

4.ª Ha dois radicais quadrados e um radical cúbico. — Isolando o radical cúbico, a equação terá a forma :

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt{b} = c$$

5.ª Ha um radical cúbico e dois radicais quadrados. — Isolando o radical cúbico, a equação terá a forma :

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = d$$

4º *Ha 1 radical quadrado sem termo racional.* — Isolando 2 radicais teremos:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$$

Quadrando, vem:

equação que se resolve pelo 2º caso.

5º *Ha um radical quadrado e outro de grau superior.* — Isolando o radical de grau superior teremos:

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

Elevando ao cubo, vem:

$$a = b\sqrt{b} + 3bc + 3c^2\sqrt{b} + c^3$$

$$a = 3bc + c^3 + \sqrt{b}(b + 3c^2)$$

eq. não que se resolve pelo 1º caso

EXEMPLO I. — Resolver a equação

Isolando o radical, temos:

Elevando ao quadrado, vem:

ou ainda:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

As raízes desta equação são

$$x' = 3, x'' = 4$$

Ambas satisfazem à equação proposta.

EXEMPLO II. — Resolver

$$\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{x-1}$$

Elevando ao quadrado, vem:

$$2 + \sqrt{x-5} = 13 - x$$

Isolando o radical, vem:

$$\sqrt{x-5} = 11 - x$$

Elevando ao quadrado, temos:

$$x-5 = 121 - 22x + x$$

ou, ordenando:

$$x^2 - 23x + 126 = 0$$

raízes desta equação são

$$x' = 9 \text{ e } x'' = 14$$

0. a. ação. — A elevação ao quadrado pode introduzir soluções no problema, devendo-se, pois, resolver a equação proposta, substituído as raízes da equação encontrada no 1º caso, para verificar se elas satisfazem a equação original.

3. Resolução dos problemas do segundo grau.

1º Problema I. — Um número ao qual, somado com sua raiz, dá 550. Qual o número?

Seja x o número procurado e seja \sqrt{x} a sua raiz quadrada, teremos a equação:

$$x + \sqrt{x} = 550 \text{ ou } x^2 + x - 2750 = 0$$

As raízes são:

$$x' = 50 \text{ e } x'' = -51$$

Logo, o número convém ao problema.

2º Problema II. — Qual é o número que, dividido com sua raiz quadrada, dá 500?

Seja x^2 o número procurado e seja \sqrt{x} a sua raiz quadrada, teremos:

$$x^2 - \sqrt{x} = 500 \text{ ou } x^2 - x - 2500 = 0$$

As raízes desta equação são:

$$x' = 51 \text{ e } x'' = -50$$

Logo, o número procurado é 51.

A segunda solução convém também ao problema, porque

$$50^2 - (-50) = 2550$$

3º Problema III. — Um relógio foi vendido por 75%. Por quanto o preço de compra foi vendido por cento quanto?

Seja x o preço de compra. O relógio foi vendido por 75% mais do que x , isto é $x + \frac{75x}{100}$

Teremos, portanto:

$$x + \frac{75x}{100} = 75 \text{ ou } x^2 + 100x - 7500 = 0$$

Alguns problemas de álgebra

As raízes desta equação são 50 e — 150. Se a raiz 50 convém ao problema
o relógio custou pois 50\$

221. Problema IV Quantos lados tem um polígono de 65 diagonais?

Demons-trar-se em geometria que um polígono convexo de n lados tem $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Por isso, pois, a equação

$$\frac{n(n-3)}{2} = 65 \text{ ou } n^2 - 3n - 130 = 0$$

As raízes são:

$$n' = 13 \text{ e } n'' = -10$$

A solução — 10 não convém à questão. O polígono tem pois 13 lados.

222. Problema V Dividir o número a em meia e extrema razão.

Dividir a em meia e extrema razão, é dividir este número em duas partes, de modo que o produto de uma das partes pela outra parte,

seja igual a a . Se as duas partes são x e $a-x$, temos

$$x^2 = a(a-x) \text{ ou } x^2 - ax + a^2 = 0.$$

As raízes desta equação são:

$$x' = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \text{ e } x'' = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

As outras partes são:

$$a - x' = a - \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2} (3 - \sqrt{5})$$

As duas partes do número são, pois

$$\frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \text{ e } \frac{a}{2} (3 - \sqrt{5})$$

$$\frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1) \text{ e } \frac{a}{2} (3 + \sqrt{5})$$

Problema VI Duas pessoas afogam um canil por 32\$. No momento da saída duas outras pessoas, as outras

a dar cada uma 1500 a mais. Quantas pessoas afogam o canil?

primeira a equação

$$xy = 32 \quad (1)$$

então, da saída, o número das pessoas é $x-2$, e cada uma dá 1500 a mais por isso.

$$xy - 2y + 0,8x = 32,8.$$

Substituindo nesta equação xy por seu valor 32, tirado de (1), após simplificação

$$3x = 6y + 4 \quad (2)$$

a equação (2) tira-se: $x = \frac{6y+4}{3}$; o valor levado para (1), dá

$$6y^2 + 4y - 64 = 0$$

a equação tem a raiz positiva 3,2. A equação (1) dá do-

10 pessoas.

Problema VII Conhecendo a cateto b e a altura h

de um triângulo retângulo,

os primeiros:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (1)$$

o triângulo tem por superfície $\frac{bc}{2}$ ou $\frac{ah}{2}$; a segunda é, pois

$$bc = ah, \quad (2)$$

tira-se

$$a = \frac{bc}{h} \quad (3)$$

(1) torna-se

$$\frac{b^2 c^2}{h^2} = b^2 + c^2 \text{ ou } (b^2 - h^2)c^2 = h^2 b^2.$$

Ela dá :

$$\frac{h}{\sqrt{5x-h^2}}$$

A equação (3) fornece e, temos, com efeito

$$a = \frac{bc}{h} = \frac{b}{h} \cdot \frac{bh}{\sqrt{5x-h^2}} = \frac{bh}{\sqrt{5x-h^2}}$$

Os lados procurados são portanto :

$$a = \frac{bh}{\sqrt{5x-h^2}}$$

226. **Problema VIII** — Achar um ponto igualmente iluminado numa reta AB de c m. unido às duas luzes, a primeira de a velas e a segunda de b velas.

Suponha A e B as luzes e O o ponto procurado. Se x é a distância de A ao ponto O , $c-x$ será a distância de B ao mesmo ponto.



Sabe-se que as iluminações estão iguais em

fontes luminosas

Se o ponto situado a x m. da distância de A recebe uma iluminação igual a 9 , o ponto O situado a distância x receberá a iluminação 9 .

Do mesmo modo, um ponto O situado a distância $c-x$ de B receberá a iluminação 9 .

$$\frac{9}{(c-x)^2}$$

Como as duas iluminações devem ser iguais, temos a equação :

$$\frac{9}{x^2} = \frac{9}{(c-x)^2} \text{ ou } 6x^2 - 108x + 324 = 0$$

Capítulo VIII

$$x' = 3,6 \text{ e } x'' = 18$$

Existem assim dois pontos sobre a reta dada que satisfazem às condições do problema. Um, O , sobre a reta, a 3,60 de A e a 2,40 de B e o outro, O' , sobre o prolongamento da reta do lado de B , a 18 metros de distância de A e 12 metros de B .

EQUAÇÕES SIMILTANÉAS E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRAU

1420

1426

1427

1428

1429

1430

1431

1432

1433

1434

1435

1436

1437

1438

1439

1440

1441

1442

1443

1444

1445

em imaginárias

$$1415 \quad x^2 - 25x^2 + 25 = 0$$

$$1416 \quad x^2 - 50x^2 - 64 = 0$$

$$1417 \quad x^2 - 4 = 0$$

$$1418 \quad x^2 - 29x^2 + 100 = 0$$

$$1419 \quad x^2 - 35x^2 + 144 = 0$$

$$1420 \quad x^2 - 35x^2 + 144 = 0$$

$$1421 \quad x^2 - 35x^2 + 144 = 0$$

$$1422 \quad x^2 - 35x^2 + 144 = 0$$

$$1423 \quad x^2 - 35x^2 + 144 = 0$$

$$1424 \quad x^2 - 35x^2 + 144 = 0$$

$$1455 \quad 8x^4 - 7x^2 + 3 = 0$$

$$1456 \quad 6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

$$1457 \quad x^4 - 8x^2 + 15 = 0$$

$$1458 \quad x^4 - 16x^2 + 8 = 0$$

$$1459 \quad x^4 + 4x^2 + 4 = 0$$

$$1460 \quad x^4 - 6x^2 + 9 = 0$$

$$1461 \quad x^4 - 9x^2 + 14 = 0$$

$$1462 \quad x^4 - 9x^2 + 14 = 0$$

$$1463 \quad x^4 - 9x^2 + 14 = 0$$

$$1464 \quad 8x^4 - 7x^2 - 11 = 0$$

PROBLEMAS DO SEGUNDO GRAU

1465 Achar dois números consecutivos cuja diferença dos qua-

1468. Achar dois números Jaber e Jaleel, a cujo quociente se dá 250.

1487 Quais são os dois princípios da física moderna? A. A relatividade e a mecânica quântica.

1448

1450

1470

1471. Ахметъ зана Գևորգոս ԺԷ, և Բաղդոս ԲԷ և Ի Կիւրաքոյ և Ի Կ
Կաթողիկոս Գևորգոս.

1172

473

1474

475

1456

1477

479

170.

400

191

94

100

100

1,000 100% capital at \$1.00 per share, rounded, or 4.1667%

1984. Para captar as diferenças de tamanho, a sua taxa de fluxo de
alimento que os peixes recebem são dados para o 1 e o 400 gramas
mas o mesmo os 10 e 20 g de peixes.

185 I am now residing at 24 Brunswick Street, N. S. - within ten miles
of the City of New York. I have been in the position of a
teacher for the last ten years. I have been employed by the
City of New York for the last ten years. I have been employed by the
City of New York for the last ten years.

+JHB as above 6 cm from top 4th S. below 2nd row

[illegible]

1487 A que nos números consecutivos 1014 que seu produto
da 8 vezes seu quociente

1486 Адамъ и Ева до нѣхъ система, де матеріалъ въ атомъ е
доука въ 408 въ озерова бѣт

1480 Deixar fender o chumbo um tanque em 5 horas. Assim o tempo necessário a cada . . . para encher o tanque. Se a 1ª leva 5 horas para

PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA

1490 $\frac{1}{2}$ m polígono em 90 graus: quantos lados tem?

[illegible]

1492 T viridit uniu. rola to 100 met. em pista a extrema razão.

1408 Q. Va or ang on x dr amba roga ayid na on joda p ox romo
Ezid e n. Rehar n roa

1404. . menor regimento de uma rota dividida em meio e extra an
gares: 1000000 1000000

1486 Em um triângulo ABC trace-se a mediana AM do ângulo C tal que $AM = AC$. O ângulo B vale $2x$ graus. Se AD mede 6 cm, então

498 Calcular a superfície da base da pirâmide e o volume da pirâmide.

1497 Nunc rita mala coramque, a populoque nato qd in tabula

1498. Aghayev, İsmet. *İsmail Paşa'nın hayatı ve eserleri*. İstanbul : İsmail Paşa Vakfı Yayınları, 1976. 100 s. ; 24 cm.

from in arms disassembled

1499. Qual é o ângulo retângulo cujos lados diferem em 1 m e a hipotenusa é 2 m? Achar os três lados.
1500. Calcular os dois catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é 20 m e a superfície 200 m².
1501. Um círculo de 10 m de raio, trace-se um diâmetro. E
1502. Duas cordas cortam-se no interior do círculo de 6 m de raio. A distância do centro ao ponto de interseção é 4 m. Achar os dois segmentos da primeira corda.
1503. Por um ponto traçar uma tangente a um círculo. A tangente tem 6 m de comprimento. Achar o raio do círculo.
1504. Num círculo de 10 m de raio, trace-se um diâmetro. E
1505. O raio de um círculo de 20 m, do raio em duas partes iguais por um círculo menor. Achar o raio do círculo menor.
1506. Um círculo de 20 m de raio, trace-se um diâmetro. E
1507. Um círculo de 20 m de raio, trace-se um diâmetro. E
1508. Achar as duas dimensões de um retângulo de 10 m de comprimento e 2 m de largura.
1509. Aumentar o comprimento de 1 m, as duas dimensões de um retângulo de 10 m de comprimento e 2 m de largura. Achar as duas dimensões sabendo que a superfície é 10 m².
1510. Um retângulo com 300 m² de superfície, com 10 m de comprimento. Achar a largura.
1511. A diagonal e o lado de um quadrado têm 9 m. Achar o lado.
1512. A diferença entre a superfície de um quadrado e a superfície de um retângulo de 10 m de comprimento e 2 m de largura é 10 m². Achar o lado do quadrado.
1513. Um círculo de 10 m de raio, trace-se um diâmetro. E
1514. Sabendo que a superfície de um triângulo é 300 m² e a hipotenusa é 20 m, achar os dois catetos.
1515. Um círculo de 10 m de raio, trace-se um diâmetro. E
1516. Dois triângulos, um duplo do outro, têm um mesmo ângulo. Achar o comprimento do lado comum.

1517. Num trapézio, a grande base excede a pequena de 10 m, e a altura é 2 m. Calcular a superfície.

PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO ESPAÇO

1518. As dimensões de uma viga estão entre si como os números 3, 4 e 5. Calcular as dimensões e o volume desta viga se a superfície lateral é 120 m².
1519. As 3 arestas de um paralelepípedo retângulo são três números inteiros consecutivos, e a diagonal vale 7 m. Calcular o volume.
1520. Um prisma hexagonal regular tem 0 m 80 de altura e 1 m 60 de superfície lateral. Calcular o lado da base.
1521. Uma pirâmide tem 10 dm de base e 2 m de altura. A que distância da base se deve traçar um plano paralelo para que a superfície lateral seja 15 dm².
1522. Um tronco de pirâmide quadrada tem 21 dm de altura, a base inferior tem 10 dm de lado e a base superior tem 5 dm de lado. Calcular o volume.
1523. Um vaso cilíndrico tem um volume de 10 m³ e uma superfície lateral de 12 m². Achar o raio e a altura deste vaso.
1524. A superfície lateral de um cilindro é 12 m² e a altura é 6 m. Calcular o raio.
1525. O diâmetro e a altura de um cilindro estão entre si como os números 3, 4 e 5. Calcular a superfície lateral se a superfície total vale 226 m².
1526. O raio de um cone tem 2 m, menos do que a geratriz. Calcular o raio e a altura, se a superfície convexa do cone é 9 m².
1527. Faz-se girar um retângulo ao redor de um dos lados que tem 1 m. Qual deve ser o comprimento do outro lado para que o volume gerado seja 31 dm³.
1528. A superfície total de um cone vale 63 m². Calcular o raio e a altura, se a geratriz é 5 m.
1529. Faz-se girar um triângulo retângulo ao redor de um dos catetos que tem 2 m de comprimento. Qual deve ser o comprimento do outro cateto para que o volume gerado seja 4 m³.
1530. Uma caldeira é formada de um cilindro terminado por dois hemisférios do mesmo raio que o cilindro. A razão do comprimento do cilindro para o raio é 4. Determinar o comprimento interior total da caldeira, que deve conter 15 hectolitros.

CAPÍTULO V

TEORIA ELEMENTAR DO TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

I. Propriedades do trinômio

226. Definição. — *Trinômio do segundo grau* é a expressão

$$ax^2 + bx + c.$$

As raízes deste trinômio são as da equação que se obtém igualando este trinômio a zero. São pois as raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

No trinômio, x pode ser positiva ou negativa, e y pode tomar todos os valores possíveis, por isso a letra x chama-se *variável independente*.

O trinômio é pois, uma função de x , visto que seu valor depende do x (n.º 83).

227. Teorema. — *Um trinômio $ax^2 + bx + c$, quando as raízes forem reais e designadas, é o produto de a pela diferença de dois quadrados*

Escrivamos

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Como sabemos

$$\frac{b}{a} = - (x' + x'') \quad \frac{c}{a} = x'x''$$

a equação precedente torna-se:

$$y = a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'')$$

Por tanto, aos parênteses quadrados, acrescentando a quantidade nula:

$$\left(x - \frac{x' + x''}{2} \right)^2 - \left(\frac{x' - x''}{2} \right)^2$$

teremos:

$$y = a \left[\left(x - \frac{x' + x''}{2} \right)^2 - \left(\frac{x' - x''}{2} \right)^2 \right]$$

Mas observando que podemos escrever:

$$1.º \quad x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = \left(x - \frac{x' + x''}{2} \right)^2$$

$$2.º \quad x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = \frac{(x' - x'')^2}{4}$$

o valor de y vem a ser:

$$y = a \left[\left(x - \frac{x' + x''}{2} \right)^2 - \left(\frac{x' - x''}{2} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Aplicação. — *Decompor numa diferença de dois quadrados o trinômio*

$$y = x^2 - 7x + 10.$$

As raízes desse trinômio são 5 e 4, temos

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{2} = \frac{x^2 - (x' + x'')x + x'x''}{2}$$

o trinômio é portanto igual a

$$y = \left(x - \frac{5 + 4}{2} \right)^2 - \left(\frac{5 - 4}{2} \right)^2$$

228. Teorema. — *Um trinômio de raízes iguais é o produto de a por um quadrado perfeito*

Se o trinômio tiver raízes iguais, temos

$$b^2 - 4ac = 0$$

Portanto

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 - 2xx' + x'^2 \right) = a(x - x')^2.$$

Aplicação. — *Decompor o trinômio $-25x^2 + 10x - 1$, cujas raízes são iguais.*

A raiz dupla é $\frac{1}{5}$; temos

$$y = -25 \left(x - \frac{1}{5} \right)^2 = -25x^2 + 10x - 1 \quad (5x - 1)^2$$

229. Teorema. — Um trinómio de raízes imaginárias é o produto de a pela soma de dois quadrados.

Se as raízes forem imaginárias, o realzante $b^2 - 4ac$ é negativo. Portanto temos

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} < 0$$

Esta última desigualdade reduz-se a :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a} < 0 \quad \text{ou} \quad a(x' + x'')^2 - 4x'x'' < 0.$$

Assim, desenvolvendo, vem :

$$a(x' - x'')^2 < 0 \quad \text{ou} \quad \text{ainda} \quad -(x' - x'')^2 > 0. \quad (1)$$

Ira, o trinómio podendo escrever-se : (formula (1) nº 227),

$$y = a \left[\left(x - \frac{x' + x''}{2} \right)^2 + \frac{(x' - x'')^2}{4} \right] \quad (2)$$

vê-se que o segundo quadrado $\frac{(x' - x'')^2}{4}$ é positivo; por conseguinte, o teorema fica demonstrado.

Aplicação. — Decompor o trinómio $4x^2 - 9x + 6,625$ numa soma de dois quadrados.

1.º Aplicando a formula (2) teremos sucessivamente

$$\frac{b}{a} = -\frac{9}{4} = -2,25$$

2.º

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{81}{16} - \frac{26,5}{4} = -\frac{13,5}{4}$$

Portanto

$$4x^2 - 9x + 6,625 = 4 \left[\left(x - \frac{9}{8} \right)^2 + \frac{13,5}{64} \right]$$

230. Teorema. — Todo trinómio do segundo grau pôde-se decompor num produto de factores do 1.º grau.

1.ª Demonstração. — A do numero 187,

2.ª Demonstração. — Temos

$$y = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right]$$

ou 3.ª

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Aplicações. 1.ª Decompor em factores o trinómio

$$y = x^2 - 16x + 55.$$

As raízes deste trinómio são 5 e 11, temos, portanto :

$$y = (x - 5)(x - 11).$$

2.ª Decompor o trinómio $y = 3x^2 + 11x - 4$

Como as raízes são $\frac{1}{3}$ e -4 , temos

$$y = 3 \left(x - \frac{1}{3} \right) (x + 4) = (3x - 1)(x + 4)$$

3.ª Simplificar a fração.

$$y = \frac{a(x - x')}{a'(x - x_1)}$$

Decompondo o numerador e o denominador em factores do primeiro grau, temos

$$y = \frac{a(x - x')(x - x'')}{a'(x - x_1)(x - x_2)}$$

Se os dois trinómios tiverem uma raiz comum, $x' = x_1$, o exemplo, y se reduzirá a

$$\frac{a(x - x'')}{a'(x - x_2)}$$

pois que $x - x'$ e $x - x_1$ serão então duas diferenças iguais.

Se os dois trinómios tiverem as mesmas raízes, torna-se

$$y = \frac{a}{a'} \quad \text{e} \quad x = x_1,$$

ou

$$y = \frac{a}{a'}$$

e a fração se reduziria a $y = \frac{a}{a'}$.

4.ª Simplificar a fração.

$$y = \frac{x^2 - 13x + 32}{x^2 - 12x + 32}$$

Se nos

$$x^2 - 13x + 32 = (x - 4)(x - 8),$$

Donde resulta que :

$$y = \frac{(x - 4)(x - 8)}{(x - 4)(x - 8)} = \frac{x - 8}{x - 8}$$

5º Formar um triângulo cujas raízes sejam a e b .

Façamos

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

Donde se deduz :

$$x - a = 0 \text{ e } x - b = 0,$$

e portanto

$$x - a, (x - b) = 0,$$

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0.$$

O triângulo $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ é triângulo pedrão, pois suas raízes são a e b .

6º Formar o triângulo cujas raízes são 10 e 11 .

O triângulo procurado é

$$x^2 - (10+11)x + 10 \cdot 11 \text{ ou } x^2 - 21x + 110.$$

231 Observações. — As propriedades precedentes pertencem também aos triângulos monomials.

1º O triângulo $x^2 + c$ tem sempre raízes iguais e de sinais contrários, estas raízes são puras, ôfis reais e imaginárias. No caso em que são reais temos $x' = x''$ na fórmula

$$y = a \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} \right]$$

que vem a ser :

$$y = a \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

Exemplo. — O triângulo

$$x^2 - 36 = 4(x^2 - 9),$$

porque

$$x' = 3$$

2º No caso em que as raízes são imaginárias, temos

$$y = a \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{b^2}{4} \right]$$

3º O triângulo monomial $ax^2 + bx$ tem sempre uma raiz nula $x' = 0$

$$y = a \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} \right]$$

Donde resulta que a fórmula

vem a ser

$$y = a \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} \right]$$

Exemplo O triângulo $5x^2 - 18x + 5$ tem as raízes $\frac{1}{5}$ e $\frac{5}{5}$.
Lemos pois

$$5x^2 - 18x + 5 = 5 \left[\left(x - \frac{3}{5} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right].$$

4º A decomposição em factores do primeiro grau effectua-se como para os triângulos completos.

II Variações do sinal do triângulo.

232 Teorema. — Triângulo do segundo grau tem sempre o sinal do primeiro termo, salvo para os valores de x compreendidos entre as raízes quando estas são reais e distintas.

Na 3ª caso positivos, que variam entre um duplo do outro.

1º O triângulo tem raízes reais e distintas

Então

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

Admitamos $x' > x''$ e demos a x qualquer valor superior a maior raiz, poderemos escrever

$$x > x' > x'',$$

e portanto,

$$x - x' > 0 \text{ e } x - x'' > 0$$

O produto $(x - x')(x - x'')$ é, pois, positivo, e y tem o sinal a .

Depois a x qualquer valor menor do que a menor raiz :

e, portanto,

O produto $(x - x')(x - x'')$ é ainda positivo, e y tem o sinal a .

Depois, entre a x um valor compreendido entre x' e x''

$$x < x' \text{ e } x > x''$$

$$x - x' < 0 \text{ e } x - x'' > 0$$

O produto $(x - x')(x - x'')$ é, pois, negativo, e

$$y = a(x - x')(x - x'')$$

tem sinal contrario ao de a .

2º O triângulo tem raízes iguais

Se a é a raiz α da equação

$$y = ax^2 + bx + c = 0.$$

Seja qual for o valor de x o quadrado de a é sempre positivo e y tem sempre o sinal de a .

O trinômio não tem raízes imaginárias,

O trinômio cujas raízes são imaginárias é o 1° grau $a = 0$, a soma de dois quadrados $m^2 + n^2$

Essa soma é sempre positiva, e o trinômio tem sempre o sinal de a .

3. Aplicações — 1.º Achar os valores de x que tornam positivo ou negativo o trinômio $x^2 + 10x - 88$

As raízes desse trinômio são 11 e -8. Este trinômio tem o sinal $+$ para todos os valores de x superiores a 11 ou inferiores a -8.

Terá o sinal $-$ para todos os valores de x compreendidos entre 11 e -8.

Portanto, qualquer número compreendido entre 11 e -8 por exemplo, posto em lugar de x , dá ao trinômio o sinal $-$. Temos, com efeito

$$x^2 + 10x - 88 = -10^2 + 10 \cdot 20 - 88 = -108.$$

É todo o número superior a 11 ou inferior a -8 por exemplo 10 dá ao trinômio um valor negativo.

Assim

$$-x^2 + 10x - 88 = -20^2 + 10 \cdot 20 - 88 = -108.$$

2.º Achar os valores de x que tornam positivo ou negativo o trinômio $x^2 - 8x + 10$

Este trinômio tem raízes iguais e escreve-se

$$x^2 - 8x + 10 = (x - 4)^2$$

Portanto, o trinômio sempre positivo seja qual for o valor real de x .

3.º Achar o trinômio $-8x^2 + 28x - 25$ tomar um valor positivo?

Tem as duas raízes iguais $x = 10/8$ e $x = 5/4$. O trinômio tem o sinal $-$ para todos os valores de x compreendidos entre $10/8$ e $5/4$, sempre negativo.

4.º Tomar se os números 10 e 2 estão exteriores às raízes do trinômio $x^2 - 17x + 60$ ou não compreendidos entre elas.

As raízes são 10 e 6. Portanto, o trinômio será positivo para todo valor de x não compreendido entre as raízes.

Então, para $x = 10$, se o trinômio toma um valor positivo, é que 10 está exterior às raízes.

Para para este valor de x , temos

$$x^2 - 17x + 60 = 10^2 - 17 \cdot 10 + 60 = 100 - 170 + 60 = -10 < 0$$

Portanto, 10 está compreendido entre as raízes.

Para $x = 2$ temos

$$x^2 - 17x + 60 = 2^2 - 17 \cdot 2 + 60 = 4 - 34 + 60 = 30 > 0$$

O número 2 está, pois, exterior às raízes.

III. Resolução da desigualdade do segundo grau

Casos a estudar. 1.º $ax^2 + bx + c = 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad (1)$$

é achar os valores de x que tornam positivo o trinômio.

$$x^2 + 10x - 88 = 0$$

Distiguaremos tres casos principais $R = b^2 - 4ac$

1.º $R > 0$, 2.º $R = 0$, 3.º $R < 0$

Em cada caso, formaremos as hipóteses $a > 0$ e $a < 0$.

Temos, pois, que estudar os seis casos seguintes.

$$\left. \begin{array}{l} R > 0 \\ a > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a > 0 \\ a < 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} R < 0 \\ a > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a > 0 \\ a < 0 \end{array}$$

1.º $R > 0$, $a > 0$. O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e distintas x_1 e x_2 . O trinômio é positivo para todos os valores de x que não estão entre x_1 e x_2 .

2.º $R > 0$, $a < 0$. O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e distintas x_1 e x_2 . O trinômio é negativo para todos os valores de x que não estão entre x_1 e x_2 .

3.º $R = 0$, $a > 0$. O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem uma raiz real e dupla x_0 . O trinômio é positivo para todos os valores de x que não são iguais a x_0 .

4.º $R = 0$, $a < 0$. O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem uma raiz real e dupla x_0 . O trinômio é negativo para todos os valores de x que não são iguais a x_0 .

$$x^2 + 10x - 88 = 0$$

4º $R=0$, $a < 0$. O trinômio é sempre negativo, pois que tem sempre o sinal de a , que é negativo (nº 232, 3º). A desigualdade

não se verifica para nenhum valor real de x , neste caso.

5º, 6º $R < 0$. Como tem raízes imaginárias, o trinômio não se anula para nenhum valor real de x , portanto, será sempre positivo, se a for positivo e sempre negativo se a for negativo. Assim, a desigualdade

$$x^2 - 11x + 30 > 0$$

é desigualdade

$$x^2 - 11x + 30 > 0$$

Neste exemplo $a = 1$ é positivo, e a desigualdade

$$x = 5.$$

Trinômio positivo, e a desigualdade será verificada.

2º Verificar a desigualdade $x^2 - 10x + 16 > 0$

As raízes do trinômio $x^2 - 10x + 16 = 0$ são $x = 2$ e $x = 8$.

Para que este trinômio tenha um valor contrário ao de a ,

é preciso dar a x os valores compreendidos entre 2 e 8.

3º Verificar a desigualdade $x^2 - 10x + 400$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

$$x^2 - 10x + 400 > 0$$

EXERCÍCIOS SOBRE O TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU 103

Os valores de x que verificam a seguinte desigualdade são:

Portanto, colocando as raízes em ordem de crescimento

ve-se que os valores de x que verificam a desigualdade são os números entre 2 e 8.

EXERCÍCIOS SOBRE O TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

1581

$$1581. x^2 - 7x + 1$$

$$1582. x^2 - 2x - 2$$

$$1583. x^2 - 5x + 6$$

$$1584. x^2 - 10x + 16$$

$$1585. x^2 - 10x + 16$$

$$1586. x^2 - 10x + 16$$

$$1587. x^2 - 10x + 16$$

$$1588. x^2 - 10x + 16$$

$$1589. x^2 - 10x + 16$$

$$1590. x^2 - 10x + 16$$

$$1591. x^2 - 10x + 16$$

$$1592. x^2 - 10x + 16$$

$$1593. x^2 - 10x + 16$$

$$1594. x^2 - 10x + 16$$

$$1595. x^2 - 10x + 16$$

$$1596. x^2 - 10x + 16$$

$$1597. x^2 - 10x + 16$$

$$1598. x^2 - 10x + 16$$

$$1599. x^2 - 10x + 16$$

$$1587. -x^2 - 95x - 306$$

$$1588. -x^2 - 95x - 306$$

$$1589. 6x^2 - 13x + 4$$

$$1590. 1 - x^2$$

$$1591. -6x^2 - x^2 + 6^2x - 11x$$

$$1592. x^2 - 10x + 16$$

$$1593. x^2 - 10x + 16$$

$$1594. x^2 - 10x + 16$$

$$1595. x^2 - 10x + 16$$

$$1596. x^2 - 10x + 16$$

$$1597. x^2 - 10x + 16$$

$$1598. x^2 - 10x + 16$$

$$1599. x^2 - 10x + 16$$

$$1600. x^2 - 10x + 16$$

$$1601. x^2 - 10x + 16$$

$$1602. x^2 - 10x + 16$$

$$1603. x^2 - 10x + 16$$

$$1604. x^2 - 10x + 16$$

$$1605. x^2 - 10x + 16$$

$$1606. x^2 - 10x + 16$$

$$1607. x^2 - 10x + 16$$

$$1608. x^2 - 10x + 16$$

$$1609. x^2 - 10x + 16$$

$$1610. x^2 - 10x + 16$$

$$1611. x^2 - 10x + 16$$

$$1612. x^2 - 10x + 16$$

$$1613. x^2 - 10x + 16$$

$$1614. x^2 - 10x + 16$$

TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

Achar as raízes dos trinômios seguintes decompondo-os em quadrados e e a la. tores arbit. depois as colunas da e que tornam estas funções positivas e as que se tornam negativas

1585. $x^2 - 58x + 517$ 1588. $x^2 - 2x^2x + 1 - x^4$
 1586. $x^2 - 200x + 20000$ 1589. $x^2 - 2x^2x + x^4$
 1587. $-x^2 + 10x - 80$ 1590. $-20x^2 + 40$

sem determinar as raízes dos trinômios seguintes dizer se os números são positivos ou negativos

1591. $x^2 - 8x + 7$ 1593. $x^2 - 10x - 20$
 1592. $-x^2 + 8x - 7$ 1597. $-x^2 + 8x + 7$
 1594. $x^2 + 11x + 28$ 1598. $-4x^2 + 4$
 1595. $x^2 + 5x$ 1599. $x^2 - 100$
 1596. $x(x - 12)$ 1600. $-40x^2 + 7x + 2$

Verificar as desigualdades seguintes

1601. $x^2 - 1 < 0$ 1612. $x^2 + 11x + 28 < 0$
 1602. $x^2 + 1 > 0$ 1613. $x^2 + 13x - 272 < 0$
 1603. $x^2 - 58x + 517 > 0$ 1614. $x^2 + 3x - 20 > 0$
 1604. $x^2 - 6x + 9 < 0$ 1615. $x^2 - 22x + 1 < 0$
 1605. $x^2 + 8x - 7 < 0$ 1616. $x^2 - 4x^2x + x^4 > 0$
 1606. $x^2 - 1 < 0$ 1617. $x^2 - 4x + 5 < 0$
 1607. $x^2 - 1 < 0$ 1618. $-x^2 + 12x - 37 < 0$
 1608. $3x - 3x - 9 < 0$ 1619. $-x^2x^2 + x^2x^2 + 1 < 0$
 1609. $x^2 - 1 < 0$ 1620. $6x^2x^2y^2 - 6x^2x^2y^2 + 1 < 0$
 1610. $x^2 + 2x^2x + x^2 > 0$ 1621. $(x - 2)(x - 5)(x - 8) > 0$
 1611. $-x^2 + 12x - 35 < 0$ 1622. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$

sem determinar as raízes dos trinômios seguintes

1623. $x^2 - 1 < 0$ 1624. $x^2 - 1 < 0$
 1625. $x^2 - 1 < 0$ 1626. $x^2 - 1 < 0$
 1627. $x^2 - 1 < 0$ 1628. $x^2 - 1 < 0$
 1629. $x^2 - 1 < 0$ 1630. $x^2 - 1 < 0$
 1631. $x^2 - 1 < 0$ 1632. $x^2 - 1 < 0$
 1633. $x^2 - 1 < 0$ 1634. $x^2 - 1 < 0$
 1635. $x^2 - 1 < 0$ 1636. $x^2 - 1 < 0$
 1637. $x^2 - 1 < 0$ 1638. $x^2 - 1 < 0$
 1639. $x^2 - 1 < 0$ 1640. $x^2 - 1 < 0$
 1641. $x^2 - 1 < 0$ 1642. $x^2 - 1 < 0$
 1643. $x^2 - 1 < 0$ 1644. $x^2 - 1 < 0$
 1645. $x^2 - 1 < 0$ 1646. $x^2 - 1 < 0$
 1647. $x^2 - 1 < 0$ 1648. $x^2 - 1 < 0$
 1649. $x^2 - 1 < 0$ 1650. $x^2 - 1 < 0$

Simplificar as frações seguintes

1651. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1652. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1653. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1654. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1655. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1656. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1657. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1658. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1659. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1660. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1661. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1662. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1663. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1664. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1665. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1666. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1667. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1668. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 1669. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$ 1670. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$

1651. Achar a condição para que a expressão $(a + bx)^2 + (a + bx)^2$ seja um quadrado perfeito. Como se faria para q e se os dados são

$$a^2 + b^2x^2 + (a + bx)^2 = (a + bx)^2 + (a + bx)^2$$

não quadrados, a expressão

$$b + bx^2 + (b + bx)^2$$

também um quadrado

1652. Se x e y são as raízes do trinômio $x^2 + px + q$ achar as raízes do trinômio $y^2 + py + q$

$$px^2 + 3x^2 + y^2 = px^2 + 3x^2 + y^2$$

onde x, y, são tres números dados.

1653. Que deve ser n para que seja quadrado o trinômio

$$x^2 + 2x + n$$

seja superior a 101

1654. Resolver a desigualdade

$$x(x^2 - 7x^2 - 12) > 0$$

1655. Achar os valores inteiros de h para que a desigualdade

$$x^2 + 7hx + h > 3.16$$

seja verificada, qualquer que seja x

1053 Se a , b , e c são os três lados de um triângulo, o trinômio

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

é positivo, qualquer que seja x .

Quais valores de a , b , e c tornam esse trinômio quadrado perfeitamente?

1057. Que valor é preciso dar a m para que o trinômio

$$mx^2 + (m-1)x + m-1$$

seja negativo, qualquer que seja x ?

1058. Que valores se devem dar a m para que os trinômios seguintes sejam positivos, qualquer que seja x ?

$$\begin{aligned} 1^\circ & \quad 2x^2 - 2x + 1 \\ 2^\circ & \quad 16 - mx^2 - 32x - 64 \end{aligned}$$

1059. Dada a quantidade A , que valor se deve atribuir a esta letra para que a desigualdade seguinte se verifique, qualquer que seja x ?

$$A - x^2 + 4x - 6$$

Qual o valor de A para que a desigualdade

$$1000 \quad x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$1001 \quad x^2 - 10x + 16 > 0$$

$$1002 \quad x^2 - 8x + 16 > 0$$

$$1003 \quad x^2 - 6x + 9 > 0$$

$$1004 \quad x^2 - 4x + 4 > 0$$

CAPÍTULO VI

VARIÁVEIS DE PRIMEIRO GRAU

Noções gerais.

Definição. — Variável independente é uma quantidade que se pode tomar qualquer valor numérico, seja qual for o valor em tamanho.

Se uma quantidade se expressa em função de uma variável independente, os valores que se podem dar a esta variável são os valores que se podem dar a esta variável independente, e os valores que se podem dar a esta variável são os valores que se podem dar a esta variável independente.

Seja x a variável independente, e y a variável dependente, e seja $f(x)$ a expressão da função que se pode dar a esta variável independente.

$$y = f(x)$$

Se a variável independente x se pode dar qualquer valor numérico, a variável dependente y se pode dar qualquer valor numérico, e a expressão da função que se pode dar a esta variável independente é a expressão da função que se pode dar a esta variável independente.

Se a variável independente x se pode dar qualquer valor numérico, a variável dependente y se pode dar qualquer valor numérico, e a expressão da função que se pode dar a esta variável independente é a expressão da função que se pode dar a esta variável independente.

Definição. — Função de uma variável independente é uma quantidade que se pode dar a esta variável independente, e a expressão da função que se pode dar a esta variável independente é a expressão da função que se pode dar a esta variável independente.

Se a variável independente x se pode dar qualquer valor numérico, a variável dependente y se pode dar qualquer valor numérico, e a expressão da função que se pode dar a esta variável independente é a expressão da função que se pode dar a esta variável independente.

Se a variável independente x se pode dar qualquer valor numérico, a variável dependente y se pode dar qualquer valor numérico, e a expressão da função que se pode dar a esta variável independente é a expressão da função que se pode dar a esta variável independente.

235a. Uma função é contínua quando varia insensivelmente.

A função precedente $y=2x$, é função contínua, porque as variações de y crescem constantemente e regularmente, quando x aumenta de 0 até ∞ .

Uma função é descontínua quando passa repentinamente de $-\infty$ a $+\infty$ inversamente, para certos valores de x .

Ex.

1.

Quando x cresce de 3 para 4, y decresce de $-\infty$ para $+\infty$ mos que para $x=3$ a função passa repentinamente de $-\infty$ para $+\infty$ é descontínua para esse valor de x .

Quando x cresce de 3 para 4, y decresce de $-\infty$ para $+\infty$ mos que para $x=3$ a função passa repentinamente de $-\infty$ para $+\infty$ é descontínua para esse valor de x .

Quando x cresce de 3 para 4, y decresce de $-\infty$ para $+\infty$ mos que para $x=3$ a função passa repentinamente de $-\infty$ para $+\infty$ é descontínua para esse valor de x .

Quando x cresce de 3 para 4, y decresce de $-\infty$ para $+\infty$ mos que para $x=3$ a função passa repentinamente de $-\infty$ para $+\infty$ é descontínua para esse valor de x .

235d. Uma função é crescente quando aumenta de valor na mesma tempo que a variável.

É o caso da função $y=2x$; é evidente que o valor de y aumenta na mesma tempo que o valor de x .

Uma função é decrescente se diminui de valor quando a variável aumenta.

A função $y=1/x$ é decrescente porque o valor de y diminui quando o valor de x aumenta.

235e. Uma função é linear quando é representada em função da variável por um polinômio do 1º grau.

Exemplo - A função $y=4x-3$ é função linear, porque o binômio $4x-3$ é do 1º grau em relação à variável x .

235f. Uma função passa por um máximo quando deixa de crescer para começar a diminuir, passa por um mínimo, quando deixa de decrescer para começar a crescer.

Mais adiante, estudaremos as condições necessárias e suficientes para uma função passar por um máximo ou por um mínimo.

35g. Representação gráfica das variações de uma função.

Para representar graficamente as variações de uma função, empregam-se duas retas indefinidas, $X'OX$, $Y'OY$ perpendiculares entre si e corlando-se em O (fig. 14).

Sobre a primeira retas $X'OX$, chamada eixo dos X ou das abscissas,

são considerados positivos à direita da origem O e negativos à esquerda.

Sobre a segunda retas, eixo dos Y ou das ordenadas, levam-se os valores sucessivos da função da variável. Esses valores são considerados positivos acima da origem O e negativos abaixo.

Do conjunto dessas duas linhas dá-se o nome de eixos de coordenadas.

Determinam quatro regiões A, B, C, D, cujos pontos todos podem ser representados por números algébricos, baseados sobre os seguintes princípios:

1º Qualquer ponto A determinado quando conhecermos sua abscissa e sua ordenada.

Determinemos o ponto M cuja abscissa $x=4$ e a ordenada $y=3$ (fig. 14).

Sobre o eixo dos x , levemos o valor $x=4$, pelo ponto obtido, tracemos uma paralela ao eixo dos y .

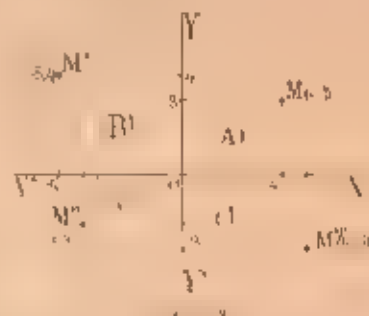
Sobre o eixo dos y levemos o valor $y=3$ pelo ponto obtido tracemos uma paralela ao eixo dos x .

O ponto M, encontro dessas paralelas aos dois eixos perpendiculares, é o ponto pedido.

2º Todos os pontos da região A, situada no ângulo XOY, têm abscissa e ordenada positivas.

3º O caso do ponto M do exemplo precedente. Reciprocamente, todos os pontos que têm abscissa e ordenada positivas, estão na 1ª região ou região A (fig. 14).

4º Todos os pontos da região B, situada no ângulo X'OY, têm abscissa negativa e ordenada positiva (fig. 14).



O ponto M tem como abscissa -5 e como ordenada $+4$. Reciprocamente todos os pontos de abscissa negativa e de ordenada positiva estão na região B, isto é, no ângulo $X'OY$.

4º Todos os pontos da região C, situada no ângulo $X'OY'$, têm abscissa negativa e ordenada negativa.

O ponto M'' tem como abscissa -4 e como ordenada -2 .

Reciprocamente, todos os pontos de abscissa negativa e ordenada negativa estão na região C, isto é, no ângulo $X'OY'$.

5º Todos os pontos da região D, situada no ângulo $X'OY$, têm abscissa positiva e ordenada negativa.

O ponto M''' tem como abscissa $+3$ e como ordenada -2 .

Reciprocamente, todos os pontos de abscissa positiva e de ordenada negativa, pertencem à região D, isto é, ao ângulo $X'OY$.

6º Se tivermos uma sucessão de pontos representando uma relação entre duas quantidades, e se unirmos esses pontos por uma linha, teremos a gráfica dessa relação.

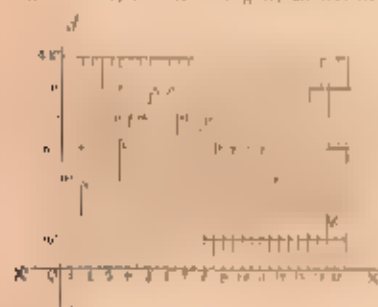


Fig. 15.

formar-se-á de 10º de manhã e de 40º de tarde.

A febre teve seu ponto culminante no sexto dia, depois, foi baixando, cessando, no 11º dia, recrudescendo, e depois, baixou gradualmente.

II Variação da função $y = ax + b$.

Dissemos que se apresentava segundo o coeficiente de x seja positivo ou negativo.

235h. 1.º caso. a. Quando o coeficiente de x é positivo, a função $y = ax + b$.

Façamos variar x desde $-\infty$ até $+\infty$ e vejamos o que vem a ser y .

$$\begin{array}{lcl} \text{Para } x = & -\infty & = -\infty \\ & -1 & = -1 \\ & 0 & = 0 \\ & 1 & = 1 \\ & +\infty & = +\infty \end{array}$$

Pela simples inspeção do quadro acima, vemos que y cresce quando x cresce, e varia de $-\infty$ para $+\infty$ quando x varia de $-\infty$ para $+\infty$.

235i. Exemplo numérico. Vamos dar as variações da função:

Façamos variar x de $-\infty$ até $+\infty$ e poderemos formar o quadro seguinte:

O exame atento desse quadro mostra que			
x	$-\infty$ até -1	y	$-\infty$ até -1
x	-1 até 0	y	-1 até 0
x	0 até $+1$	y	0 até $+1$
x	$+1$ até $+2$	y	$+1$ até $+2$
x	$+2$ até $+3$	y	$+2$ até $+3$
x	$+3$ até $+\infty$	y	$+3$ até $+\infty$

5) Representação gráfica da variação. — Inicialmente vamos sucessivamente os pontos que têm as coordenadas

$$\begin{array}{l} (0, +1), (+1, +2), \\ (+2, +3), (+3, +4), \end{array}$$

e vamos esses pontos unir por uma linha (Fig. 16); e teremos, como mais adiante veremos, a função $y = x + 1$.



Com efeito, dividamos a expressão (2) pela expressão (1), membro a membro, teremos :

$$\frac{MP}{OM} = \frac{OP}{OM} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{OM} = \frac{OP}{OM}$$

Os dois triâng. os retângulos OPM e $OP'M'$ têm um ângulo igual (ângulo reto, compreendido entre dois lados proporcionais, são semelhantes e têm os ângulos iguais. O ângulo POM de um é igual ao âng. $P'OM'$ do outro, portanto, as retas OM e OM' têm mesma direção os pontos O, M', M , estão em linha reta.

2.º *Ex.* Do caso geral $a \neq 0, b \neq 0$. Nessa hipótese, temos : $y = ax + b$. No 2.º caso, mostra nos que a função $y' = ax$, representa uma reta passando pela origem. Podemos escrever : $y = y' + b$.

Conhecendo o valor de y' , tiramos o valor de y , juntado a quantidade constante b . A função será representada por uma reta AB paralela a $B'A'$, tal que, para qualquer valor de x , a diferença das ordenadas correspondentes y, y' é igual a b (fig. 20).

285g. Observações. — 1.º O valor de a que representa o coeficiente angular do ângulo XOB' ; ou porque esse coeficiente tem o nome de coeficiente angular.

2.º Quando $a = 0$ a função $y = ax + b$ reduz-se a $y = b$ e a reta AB de ponto B na y e A no eixo x .

3.º Por esse motivo chamamos *ordenada na origem*.

4.º a, b , não é determinada. Já não se conhecem dois dos seus elementos, logo, para se traçar a reta representada pela equação $y = ax + b$ é suficiente deter. minar as coordenadas de dois pontos quaisquer. Geralmente tomam-se os pontos onde a reta corta os eixos.

Para obter a reta representada pela equação $y = ax + b$ procuremos o ponto onde corta o eixo dos x , isto é, o ponto B que tem ordenada nula, ou $y = 0$ desta vem : $x = -\frac{b}{a}$. O ponto A , de abscissa $x = 0$, tem a ordenada $y = b$.



Unindo A com B , vem a reta procurada AB , representando de $y = ax + b$ (fig. 21).

$$x = 50, APL, AQ, BQ$$

1.º Estudo do movimento retilíneo uniforme. Em movimento que anda sobre um eixo, tem movimento uniforme quando percorre, no mesmo sentido, espaços iguais em tempos iguais ou ainda, quando os espaços percorridos são proporcionais aos tempos empregados em percorrê-los.

Exemplo: O móvel M , que se desloca sobre o eixo AX partir de O , no sentido positivo, e percorre espaços iguais $OA = AB = BC = CM$ em tempos iguais possui movimento uniforme (fig. 22).



No movimento uniforme, velocidade é o espaço percorrido durante a unidade de tempo.

Se tomarmos uma hora para unidade de tempo e se por segundos OA, AB, BC, CM forem percorridos em 1 hora durante uma hora diremos que um desses segundos é a velocidade do móvel para a unidade de tempo considerada.

Designando por x o espaço percorrido durante um tempo t .

$$x = vt$$

Já conhecemos essa fórmula. Lá temos a velocidade v e o tempo t sob o eixo vt .

Nessa fórmula, x representa o espaço e t o tempo. A proposição é grande o dobro da.

Para que um movimento seja uniforme é necessário e suficiente que o espaço seja uma função do 1.º grau em relação ao tempo.



a) A condição é necessária — Com efeito se pormos que o móvel parta do ponto M_0 e já abscissa é x_0 . Desloca-se durante t segundos, percorre o espaço M_0M e chega ao ponto M cuja abscissa é x (fig. 23)

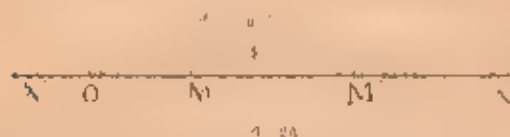
O espaço percorrido é, $x - x_0$.

Send o movimento uniforme devemos ter:

$$x - x_0 = v \cdot t \quad \text{ou} \quad \text{constante} = v \text{ velocidade.}$$

Logo $t = \frac{x - x_0}{v}$ ou $t = \frac{x}{v}$.

b) A condição é suficiente — Com o tempo t , no instante t o móvel percorreu o espaço indicado pela x .



Se o móvel se deslocar durante t segundos (fig. 24), o espaço percorrido será $x - x_0$. O movimento será

$$x - x_0 = v \cdot t \quad (2)$$

Substituindo membro a membro as equações (1) e (2) teremos

$$x - x_0 = v \cdot \frac{x - x_0}{v} = x - x_0 \quad \text{constante}$$

Logo a condição é necessária e suficiente para que o movimento seja uniforme, ou seja, a velocidade seja constante.

II Exemplo numérico. — A equação de um movimento uniforme sendo dada pela relação $x = 5 + 2t$

1º Estabelecer o gráfico da reta que representa esse movimento;

2º Dizer qual é a velocidade desse movimento (tomando para unidades o metro e o segundo);

3º Determinar o número de segundos necessários ao móvel para se achar a 20 metros da origem

1º Para obter a reta representativa do movimento, vamos escolher os pontos que ficam nos eixos (fig. 25)

Se $x = 0$, $t = -6$ ou $t = 6$

Se $t = 0$, $x = 5$ ou $x = 5$

A reta AM é a reta procurada. É a representação do movimento (fig. 25)

2º A velocidade é representada pelo coeficiente de t , ou seja, 2 metro por segundo

3º O móvel ocupa a origem quando $x = 0$, isto é, no instante $t = -6$ (fig. 25)

O móvel está a 20 m da origem quando $x = 20$. Isto é, no instante $t = 15$ quando pela relação



do móvel $t = 15$ segundos

O tempo pedido será a diferença dos dois valores de t , ou seja, 21

$$15 - (-6) = 21 \text{ segundos}$$

Observação. — A reta AM é a representação do movimento. A reta AN é a representação do movimento. A reta AN é a representação do movimento.

III Resolução gráfica de um sistema de 2 equações com 2 incógnitas. — Vamos resolver graficamente o sistema

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$



Fig. 26 a)

Logo se resolvermos o sistema de 2 equações com 2 incógnitas, vamos obter 2 pontos de interseção das retas. Logo a solução do sistema é o ponto de interseção das retas, ou seja, o ponto (3, 7).

Logo a solução do sistema é o ponto (3, 7).

Para a 1ª equação, estes 2 pontos são

$$x=0, y=\frac{5}{6} \text{ e } (x=5 \text{ e } y=0)$$

e vem a reta AB $fug. 25 km/h$, para a 2ª equação, estes

2 pontos são $x=0, y=2$ e $x=5 \text{ e } y=0$ e vem a

reta CD, as retas AB e CD encontram-se no ponto M, e as

coordenadas são as raízes do sistema proposto.

Medindo AM e MP, vem $v=1$ e $v=2$ as raízes procuradas.

IV Gráfico dos trens. Se um trem anda com velocidade

de v km/h, o diagrama do seu movimento é uma reta de

inclinação v e, como para sua distância à origem não muda

e o diagrama é uma reta paralela a OX eixo dos abscissas.

Correndo o trem com velocidade v' , o diagrama do movi-

mento é outra reta de inclinação v' , e assim por diante.

Como exemplo, tomemos o gráfico de al.

F. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

horários e o gráfico correspondente do de

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

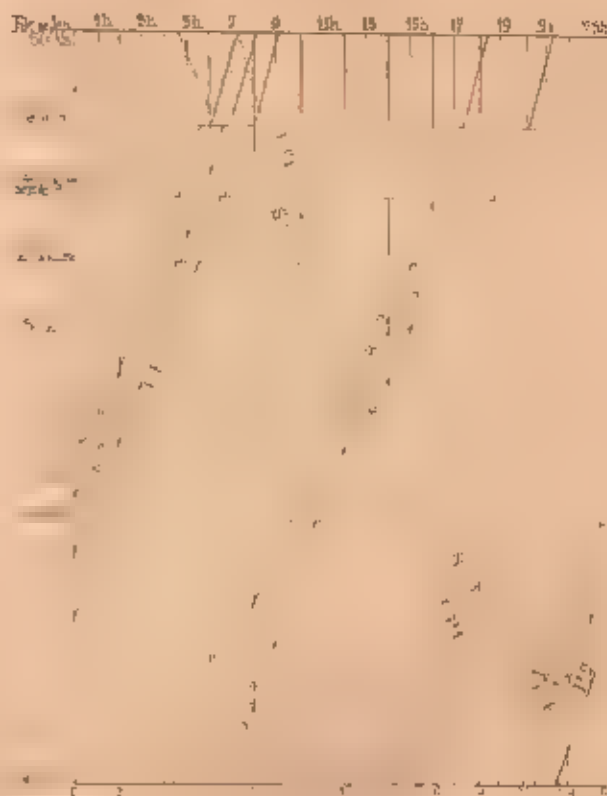
Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Fig. 1. B. entre S. Paulo e Rio de Janeiro.

Gráficos de trens entre S. Paulo e Rio.



A Variação das Funções

Variação da Função

Variação da Função

Variação da Função

Variação da Função

Variação da Função

Variação da Função

Variação da Função

Variação da Função

Variação da Função

2º O quadrado de qualquer número, positivo ou negativo, é sempre positivo, ou o quadrado de um número algebrico é o mesmo que o quadrado de seu valor absoluto.

Quando o valor absoluto de x é muito grande seu quadrado é também muito grande por consequência para

Se o valor absoluto de x diminui, seu quadrado diminui o valor da função $y = x^2$ é decrescente.

Para $x=0$, temos também $y=0$.

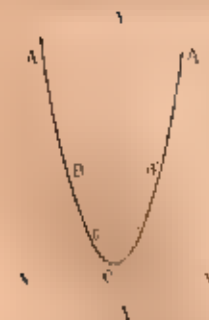
Quando o valor de x aumenta de 0 até $+\infty$, $y=x^2$ cresce também de 0 até $+\infty$.

Segundo a definição nº 23ff, a função passa por um mínimo para $x=0$ pois para esse valor, de x de decrescer para começar a crescer.

Tabr. Representação grafica. Para representar graf

Os eixos regulares OX e OY (fig. 27), nel traçamos a posição dos pontos A, traçamos os eixos por exemplo, os eixos regulares.

$-\infty$	-3	-2	-1	0	+1	+
x	0	+1	+4	0	+1	+4



Para $x=$
Para $x=$

Para $x=0$, temos $y=0$ e o ponto O.
Para $x=+1$, temos $y=+1$ e o ponto C'.
Para $x=-2$, temos $y=+4$ e o ponto B'.
Para $x=-3$, temos $y=+9$ e o ponto A'.

Unindo esses pontos por uma curva, obtemos a curva AOA' e representa

Fig. 27.

logo a precedente as ordenadas da anterior são as abscissas da curva a .

Dois casos se apresentam conforme a for positivo ou negativo, isto é, $a > 0$ ou $a < 0$.

1º caso $a > 0$. Seja a função $y = \frac{x^2}{3}$. O valor de a é $\frac{1}{3}$.

As ordenadas da curva são as da curva precedente divididas por 3.

Podemos formar o quadro seguinte

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	+1	+2	+
y		-3	-4	-1	0	+1	+3	+

Caso: $a < 0$. — Seja a função $y = -\frac{x^2}{3}$.

O valor de

$a = -1/3$. (a)

As ordenadas são iguais às da curva precedente, mas de sinais contrários.

A função cresce de $-\infty$ até 0, depois decresce de 0 até $+\infty$ passando por um máximo para $x=0$.

Podemos formar a

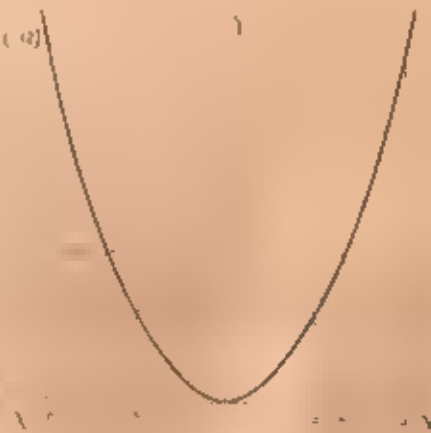


Fig. 29.

Fig. 28.

x	0	1	2	3	4	5	∞
y	0	1	4	9	16	25	∞

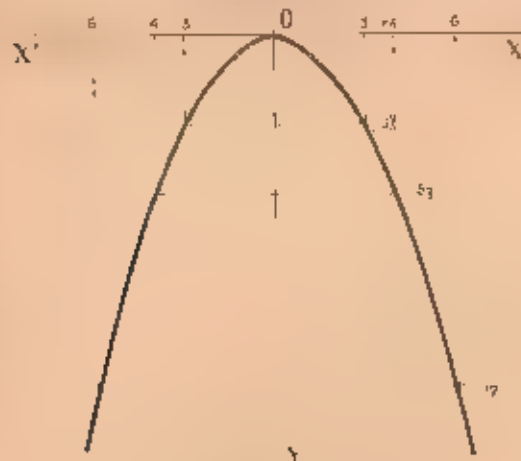


Fig. 25

15ª APLICAÇÕES

I Queda livre de um corpo no vácuo. 1ª Ensina a física que na queda, os espaços percorridos por um corpo em queda livre são proporcionais aos quadrados dos tempos empregados em percorrê-los.

Essa lei vem sintetizada na fórmula $e = \frac{gt^2}{2}$

Nessa expressão e designa o espaço percorrido; t o tempo empregado em percorrer esse espaço; g a aceleração do movimento produzida pela gravidade.

O diagrama do espaço percorrido é uma curva em forma de parábola (Fig. 25).

Além disso, a física ensina que a velocidade de um corpo em queda livre é proporcional à duração da queda.

Essa lei vem sintetizada na fórmula $v = gt$

O diagrama da velocidade v é uma reta passando pela origem. Ver a p. 235a.

II Exemplo numérico Um corpo cai em queda livre de 400 metros de altura. Qual o tempo que levará a queda se $g = 9,807$? Qual será a sua velocidade ao chegar ao solo?

Na fórmula $e = \frac{1}{2}gt^2$ tiremos o valor de t . Temos: $t = \frac{2e}{g}$

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$$

Substituindo as letras pelos valores do problema, teremos:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 400}{9,807}} = \sqrt{\frac{800}{9,807}} = \sqrt{81,57} \approx 9,03$$

$$v = gt = 9,807 \cdot 9,03 \approx 88,5$$

A velocidade ao chegar ao solo é de 88,5 m/s.

IV Variação das funções $y = \frac{1}{x}$ ou $y = \frac{1}{x}$

235a. Variação da função $y = \frac{1}{x}$. — A função $y = \frac{1}{x}$

decrece sempre, para $x=0$ é descontínua.

Quando $x = -\infty$, a função é infinitamente pequena, visto o denominador da fração $\frac{1}{x}$ ser infinitamente grande, por consequência, para $x = -\infty$, $y = 0$.

Quando x cresce de $-\infty$ até 0, a função é negativa e decresce até $-\infty$, porque $\frac{1}{0} = \pm \infty$.

Mas quando x se torna positivo, a função é também positiva, logo, é preciso que essa função passe repentinamente de $-\infty$ para $+\infty$, nesse caso, diz-se que a função é descontínua para $x=0$.

Quando x cresce de 0 até $+\infty$, a função $\frac{1}{x}$ conserva-se positiva, mas decresce insensivelmente até 0 quando x cresce até o infinito.

235_r Representação gráfica. Tomemos dois eixos de tangenciares; dando a x os valores do quadro abaixo e calculando os valores correspondentes de y , teremos:

x	-3	-1	-1/3	0	1/3	1	3
y	-3	-1	-1/3	0	1/3	1	3

Para $x = -3$ temos $y = -3$ (ponto A).

Para $x = -1$, temos $y = -1$ (ponto B).

Para $x = -1/3$ temos $y = -1/3$ (ponto C).

Para $x = 0$ temos $y = 0$ (ponto O).

Para $x = 1/3$ temos $y = 1/3$ (ponto B').

Para $x = 1$, temos $y = 1$ (ponto A').

Para $x = 3$, temos $y = 3$ (ponto C').

A curva representada pela função $y = \frac{1}{x}$ (fig. 235) é uma hipérbole com eixos de tangenciares XX' e YY' . Ela tem assíntotas XX' e YY' e os pontos A, B, C, A', B', C' são pontos da curva. As retas tangentes aos pontos A, B, C, A', B', C' são as retas tangentes da curva.

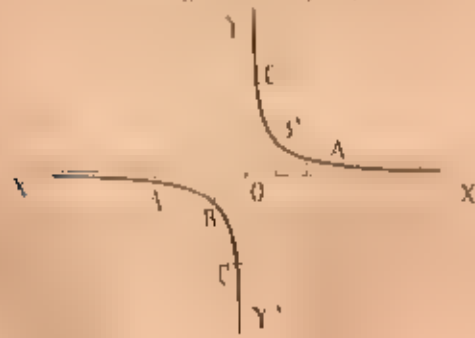


FIG. 235.

235_r Variação da função: $y = \frac{1}{x}$. — Essa função é ana-

loga à precedente nas ordenadas desta são multiplicadas pelo coeficiente a .

Distinguiremos dois casos segundo a for positivo ou negativo, isto é, segundo: $a > 0$ ou $a < 0$.

1º caso: $a > 0$. Sejam a função y

O valor de a é 3. As ordenadas da curva precedente são multiplicadas por 3 e o quadro precedente vem a ser

x	-3	-1	-1/3	0	1/3	1	3
y	-9	-3	-1	0	1	3	9

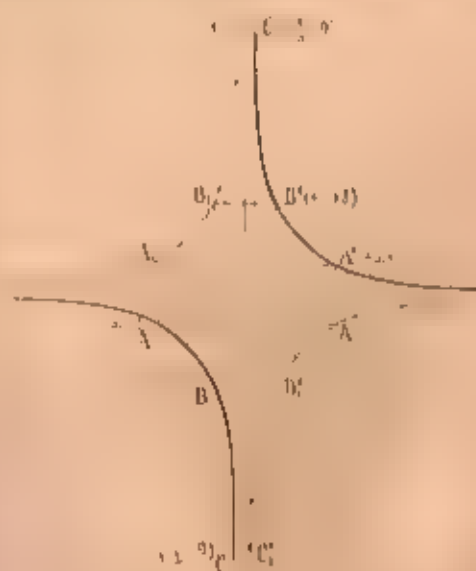


FIG. 236.

Se o caso $a = 0$, seja a função p que o valor de $a = 0$ as ordens das x e y iguais às da curva p e da curva q de sinais opostos.

O quadro das variações vem a ser

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	20	$18 \frac{1}{3}$	16	14	12	10	8	6

A curva é a da fig. 23, traço pontilhado.

355a. APLICACÃO

Lei de Mariote. *Numa temperatura constante, se se tiver de uma mesma massa de gás está no estado inicial, das pressões que se porem.*

Seja V o volume de um gás sob a pressão de H , e V' o volume desse mesmo gás sob a pressão de H' . Baseados na lei de Mariote, poderemos escrever:

$$\frac{V}{V'} = \frac{H'}{H}$$

ou ainda: $VH = V'H = \text{Constante}$ (a por exemplo).

Por esta última relação podemos calcular a pressão em função do volume e da constante a e reciprocamente.

Temos, pois $H = \frac{a}{V}$, expressão análoga à função que acabamos de estudar.

Exemplo numérico. — Sob a pressão de 8 atmosferas uma massa de gás ocupa um volume de $0,5 \text{ dm}^3$. Representar as variações da pressão quando o volume varia entre $0,2 \text{ dm}^3$ e $0,7 \text{ dm}^3$.

Se x for o volume, e y a pressão, a lei de Mariote

$$y = \frac{a}{x}$$

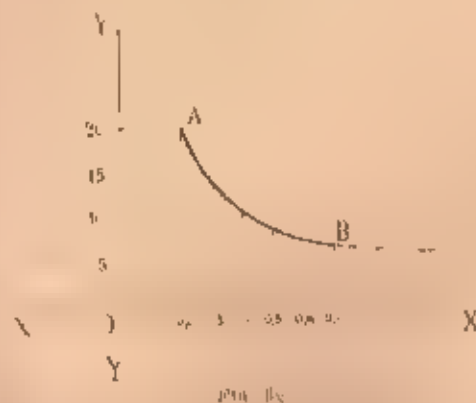
ou

se fizermos variar x entre $0,2$ e $0,7$, poderemos formar o quadro seguinte

x	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$
y	20	$13 \frac{1}{3}$	10	8	$6 \frac{2}{3}$	$5 \frac{1}{7}$

h. dea esse quadro que a pressão H varia de 20 at. sob a x de $0,2$ a $0,7$ atmosféras, quando o volume varia de

A curva seg. fig. 23, representa essas variações. A parte da curva AB que se lêz ao traçado pontilhado, por isso representada pela função



Problema 1. Uma linha de bondes reúne duas estações A e B, distantes de $a \text{ km}$, de cada estação saem carros no $b \text{ m}$ e $c \text{ m}$ minutos, mantendo com isso uma velocidade uniforme. Um viajante a $p \text{ m}$ percorre o mesmo traj. de A para B, com velocidade uniforme. Pá um carro chegar o outro antes, quando parte da estação A e quando chega a estação B. Na viagem, encontra 17 bondes indo no mesmo sentido que ele

Sabemos que b vale 8 km, mais por hora que a , ou 8.000 m, por 60 min., ou 400 3 de met. por minuto; logo,

$$\frac{400}{3} = b - a$$

As equações (1), (2) e (3), resolvem a maior parte do problema.

Multiplicando (3), por t e desenvolvendo (2), vem

$$at + \frac{400}{3}t = c = 80.000, \text{ por causa de (1);}$$

$$at + 100a = 80.000.$$

Subtraindo membro a membro, vem:

$$100a = \frac{400}{3}t$$

donde

$$a = \frac{4}{3}t$$

Substituímos a em (1), obtemos

$$\frac{4}{3}t + \frac{400}{3} = 80.000$$

ou

$$t^2 + 100t + 100 = 80.000$$

As raízes são $t' = 200$ min e $t'' = -300$ min.

A solução negativa não convém ao problema.

A equação (1) dá $a = \frac{4}{3} \times 200 = 266 \frac{2}{3}$ km/h.

A equação (3) dá $b = \frac{800}{3} + \frac{400}{3} = 400$ metros.

Para calcular todo o trajeto, temos este problema: A e B correm com as velocidades respectivas de $\frac{800}{3}$ de metros e 400 metros por segundo, B parte 8 h 30 m, — 4 h = 4 h 30 m 30 x 4 + 30 = 270 minutos mais tarde, qual é a distância percorrida quando A e B se encontram?

Se x met. for essa distância e y min. o tempo levado por B, teremos

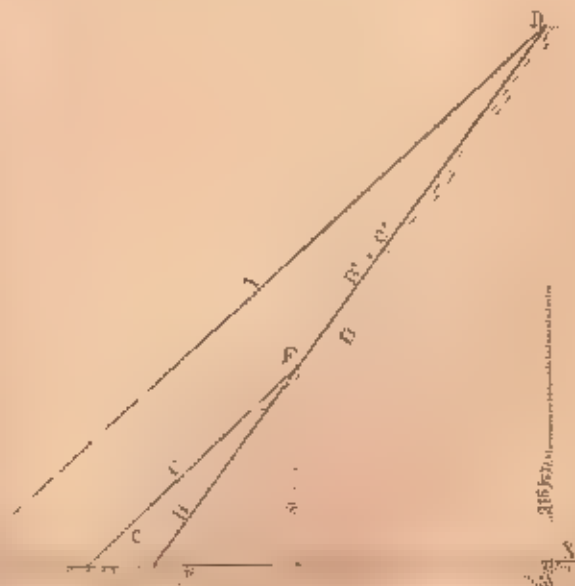
$$x = 400y = 270 + y$$

$$x = 400y = 270 + y$$

$$y = 17 \text{ h } 30 \text{ min.}$$

Sua velocidade é $\frac{800}{3}$ de metro por minuto ou $\frac{800 \times 60}{3} = 16 \text{ km}$ por hora.

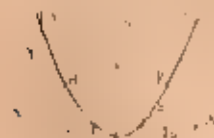
A distância percorrida é de 216 km.



No figura 34 OD é o gráfico de A e B' são os gráficos de C e B, as duas perpendiculares C e B figuram as velocidades. Os tempos vêm contados no eixo horizontal e os km no eixo vertical.

6. Resolução gráfica da equação do 2º grau
ver graficamente a equação do 2º grau
degrada-se por m até a curva da fun-
ção $y = x^2$.

7. Quando m for par os valores de y
são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.



Estudo da função

1. Para x variando o seguinte quadro 1
corresponde aos de x e de y



2. Quando m for par os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.

3. Para m par os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.

4. Quando m for ímpar os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.

5. Quando m for ímpar os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.

6. Quando m for ímpar os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.

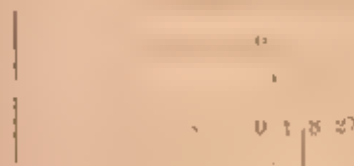
7. Quando m for ímpar os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.

A curva é a da fig. 27; é simétrica em
relação ao eixo dos y .

Os resultados são quasi os mesmos para
 m igual a qualquer outro número par, como
4, 6, 8, etc.

2º Quando m for ímpar os valores de y
são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.

Exemplo. $y = x^3$. Se fixermos
 $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ os
valores correspondentes de y serão os do
quadro abaixo:



A curva é a da fig. 35; é côncava e si-
métrica em relação ao centro O .

3º Se m for ímpar os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de
sinais contrários, negativos quando x for
negativo e positivos quando x for positivo.

236 ter. Estudo da função $y = \frac{1}{x^m}$.

Fig. 25.

Dando à variável independente x todos
os valores possíveis desde $-\infty$ até $+\infty$, leremos o seguinte
quadro dos valores correspondentes de x e de y



Para esta função, devemos também distinguir os casos de m par e de m ímpar.

1.º Quando m for par, dados os valores de y são positivos e iguais 2 a 2 porque tanto para $x=a$ como para $x=-a$, temos o mesmo valor $y=$

Exemplo, $y = \frac{1}{x^2}$ — Dando-lhe os valores $-\infty, -3, -2$

1, 0, 1, 2, 3, ... temos o seguinte quadro dos valores correspondentes de x e de y

y	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$

A curva compreende dois ramos AB e CD (fig. 37), simétricos em relação ao eixo de y . Cada ramo parte de 0 e vai até ao infinito.

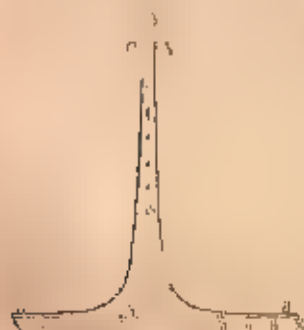


FIG. 37

Exemplo $y = \frac{1}{x^4}$ — Dando

a x os valores $-\infty, -3, -2,$

$-\infty$ temos os seguintes valores de y

indicados no quadro seguinte

Fazendo $m=1, 3$, ou qualquer outro número par obtêm-se resultados muito semelhantes.

2.º Quando m for ímpar os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de sinais contrários, são negativos para x negativo e positivos para x positivo.

A curva representativa é a da fig. 38. Compreende os dois ramos AB e CD, simétricos em relação ao centro O.

Quando x cresce de $-\infty$ até 0, y é negativo porquanto é sempre negativo e decresce até $-\infty$.

Quando x cresce de 0 até $+\infty$, y começa por valer $+\infty$ e sempre positivo e decresce pouco a pouco até 0.

No ponto $x=0$, a função y é descontinua, porque passa de $-\infty$ a $+\infty$.

A curva representativa da fig. 38 parece uma hipérbole mas

não é porque a equação $y = \frac{1}{x^3}$ ou $x^3 y = 1$ e do 3.º grau, sabe-se que a hipérbole é uma das 3 curvas do 2.º grau.

Para $m=5$ ou qualquer valor ímpar, obtêm-se resultados parecidos com os de $m=3$.

3.º Para $m=1$, encontra-se a função $y = \frac{1}{x}$ que já foi estudada

(n.º 235 n.º fig. 30), é uma curva de quadratura

Estudo da função $y = \frac{1}{x^3}$ — Dando a x os valores $-\infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, +\infty$ temos o seguinte quadro dos valores correspondentes de x e de y

y	$-\infty$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{27}$	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$+\infty$
x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$

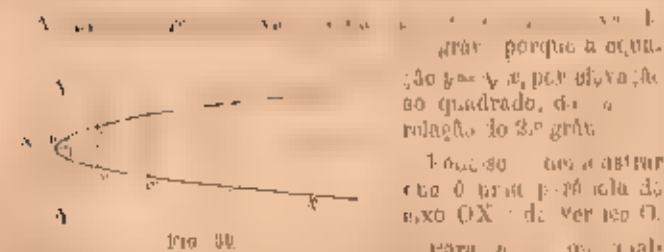


FIG. 38

Mais uma vez precisamos considerar os dois casos de m par e de m ímpar.

1.º Quando m for par, y tem valores imaginários para todos os valores negativos de x ; logo não a curva real, desde $x = -\infty$ até $x = 0$, a curva real existe apenas para $x \geq 0$, os valores de y começam por 0, têm o mesmo sinal de x e vão até $+\infty$. A variável, mais pequena x não pôde ser negativa porque dar a y imaginário, só pôde variar de 0 até $+\infty$ a cada valor positivo de x terres o valor, para y los valores iguais a de x mais os múltiplos, portanto, sendo par a raiz tem a o duplo sinal \pm .

EXEMPLO: $y = \sqrt{x}$ — Neste caso $m = 2$ — então a x os valores 0, 1, 4, 9, 16, 25, ... teremos o seguinte quadro dos valores de x e de y .



resultados são parecidos com os de $m = 2$. Para a curva $y = \sqrt[3]{x}$ mais uma vez temos, a seguir, a curva completa de $y = \sqrt[3]{x}$ de grau superior a 2.

2.º Quando m for ímpar x pôde tomar todos os valores positivos, desde $-\infty$ até $+\infty$ e a cada valor de x corresponde sempre um valor real para y — os valores de y têm o sinal de x , negativos para x negativo e positivos para x positivo.

EXEMPLO: $y = \sqrt[3]{x}$ — Este é o caso de $m = 3$. Dando a x os valores $-27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, \dots$ temos este quadro dos valores de x e de y .



A curva representada na fig. 40

A função y começa pelo valor $-\infty$, cresce sempre, alcança o valor 0 para $x=0$ e o valor $+\infty$ para $x=+\infty$.

A curva $ABCD$ em CD é simétrica em relação ao centro O , para $m=3$ ou qualquer valor ímpar as resultantes são parecidas com as de $m=3$.

Para $m=1$, a função é outra vez $y=x$, já encontrada no 1.º caso (fig. 3.º).

EXERCÍCIOS

Desenhar graficamente os seguintes B.B. 1.º 2.º 3.º 4.º 5.º 6.º 7.º 8.º 9.º 10.º

Representar graficamente as funções seguintes

128a. $y = 3x - 2$

131a

129a. $y = -2x + 3$

132a

130a. $y = \frac{x}{2}$

133a

3.º Um botulhão sai do porto às 4 horas da madrugada e o outro sai do mesmo porto às 5 horas da manhã para 1 hora em lugar há 12 minutos. O 1.º botulhão chegou ao meio-dia. Dizer a distância percorrida. (Solução aritmética e gráfica.)

Estudar as variações das funções

147a. $y = 2x^3$.

148a. $y = -x^3$.

149a. $y = -2x^2$.

150a. $y = \frac{3}{4}x^4$.

151a. $y = \frac{1}{2}x^5$.

152a. $y = \frac{x}{2}$.

153a. $y = \frac{2}{x}$.

154a. $y = \frac{3}{x^2}$.

155a. Construa a curva $y = \frac{1}{2}x^2$ e a reta $y = -2x - 3$. Quais são as abscissas dos seus pontos de interseção?

156a. Construa a curva $y = \frac{1}{2}x^2$ e a reta $y = -2x - 3$.

157a. Um corpo cai livremente num lugar onde a aceleração da gravidade é $g = 980$. Qual é sua velocidade e o espaço percorrido no fim de 3 segundos de queda?

158a. Quanto tempo leva um corpo para cair livremente de uma altura de 500 m., num lugar onde $g = 980$?

159a. Um bloco de madeira, de volume $V = 240 \text{ dm}^3$, que volume ocupará sob a pressão de 8 kg por cm^2 ?

QUARTA PARTE

PROGRESSÕES E LOGARITMOS

CAPÍTULO PRIMEIRO

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1. Definições.

2a. **Progressão.** *Progressão* é uma serie de termos tais que a razão de cada um, no poder de n , seja uma constante. Dizem-se progressões aritméticas e progressões geométricas.

Progressão aritmética. — *Progressão aritmética* é uma de termos tais que a diferença entre cada um e o precedente seja constante. Essa diferença chama-se *razão* da progressão.

Veja duas series de números

$$7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 \quad (1)$$

$$104, 94, 84, 74, 64, 54, 44 \quad (2)$$

3a. duas progressões aritméticas

Na primeira, a razão é $10 - 7 = 3$, e na segunda, é $104 - 94 = -10$.

4. **Progressão crescente, decrescente.** — Uma progressão é *crescente* quando sua razão é positiva, é *decrescente* quando sua razão é negativa. A progressão (1) é crescente, e (2) é decrescente.

239. Notações. A progressão aritmética formada pelos números $a, b, c, d, \dots, h, k, l$, escreve-se :

$$a, b, c, d, \dots, h, k, l$$

o lá-se a está para b está para c , está para d , está para b , está para k , está para l . A letra a , representa o primeiro termo, r o dízimo; r , a razão, n , o numero dos termos e S , a soma dos termos da progressão.

II Propriedades das progressões aritméticas

240 Teorema. O ultimo termo de uma progressão aritmética iguala o primeiro augmentado de tantas vezes a razão quantos termos menos um ha na progressão.

Seja a progressão de n termos,

$$a, b, c, \dots, h, k, l$$

Então, se $n = 3$, temos

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

$$h = k + r$$

$$l = h + r$$

Substituindo-se membro a membro essas $n-1$ igualdades, vem :

$$a + (n-1)r = l$$

Logo, se suprimir nos dois membros a quantidade commum $a + (n-1)r$, temos :

$$l = a + (n-1)r \quad (a)$$

241. Corolários. — 1.º Se a razão fosse negativa teriamos :

$$l = a - (n-1)r$$

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ l & a & b & c & d & e & f \\ l & a & b & c & d & e & f \\ l & a & b & c & d & e & f \\ l & a & b & c & d & e & f \\ l & a & b & c & d & e & f \\ l & a & b & c & d & e & f \end{array}$$

242. Teorema. — Em toda progressão aritmética, a soma de dois termos tomados a igual distância dos extremos é igual a soma dos extremos.

Seja l o termo que tem m termos antes, e a o que tem m termos depois, temos, com evidencia, (a) :

$$l = a + mr \quad (1) \quad a = l - mr \quad (2)$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda, temos

$$l - a = 2mr \quad \text{donde} \quad a = l - 2mr$$

Inserção de meios aritméticos. — Para inserir m meios aritméticos entre a e b , é formar uma progressão de extremos sejam a e b .

$$a, a+r, a+2r, \dots, b$$

É preciso substituir l por b e n por $m+2$. Esta razão é o tanto :

$$\frac{b-a}{m+1}$$

Aplicação. Interpoler nove meios aritméticos entre 8 e 18. A progressão procurada terá 11 termos ; o primeiro será 8 e o ultimo 18. A razão é $\frac{10}{10} = 1$.

A progressão é, pois :

$$8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38$$

III. Soma dos termos de uma progressão aritmética

244. Teorema — A soma dos termos de uma progressão aritmética é igual à soma dos extremos multiplicada pelo número dos termos.

Seja a progressão de n termos.

$$a, b, c, d, \dots, n$$

Temos:

$$S = a + b + c + d + \dots + l + j + k + i,$$

ou

$$S = l + k + j + i + \dots + d + c + b + a$$

Somando membro a membro essas duas igualdades, temos

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + j) + \dots + (k + b) + (j + c)$$

Cada um desses n grupos de parêntese é igual aos extremos (244).

Temos, portanto:

$$2S = (a + l) + (a + l) + \dots + (a + l) = n(a + l)$$

ou,

$$S = \frac{(a + l)n}{2} = \left(\frac{a + l}{2} \right) n. \quad (f)$$

Exemplo 1. — Um soldado

$$S = \frac{(a + l)n}{2}$$

substituindo l por seu valor (a), temos:

$$S = \frac{(n-1)n}{2} \left[a + \frac{r}{2}(n-1) \right] n. \quad (g)$$

Exemplo 2. — Um soldado

estabelecidas para as progressões crescentes e para as progressões decrescentes, com

em

IV. Problemas sobre as progressões aritméticas.

247. Problema I. — Achar a soma dos n primeiros números naturais.

Estes números formam a progressão de n termos:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$$

cujas soma é:

$$S = \left(\frac{1 + n}{2} \right) n.$$

Exemplo. — A soma dos 100 primeiros números naturais

$$S = \left[\frac{1 + 100}{2} \right] 100 = 5050.$$

248. Problema II. — Qual é a soma dos n primeiros números ímpares?

Estes números ímpares formam a progressão de n termos

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, l$$

cujas soma (S) é:

$$S = \left[a + \frac{r}{2}(n-1) \right] n = \left[1 + \frac{2}{2}(n-1) \right] n = n^2.$$

Exemplo. — A soma dos 100 primeiros números ímpares

$$S = 100^2 = 10.000$$

249. Problema III. — Um coronel dispõe de 3321 soldados, e coloca-os em triângulo de modo que a primeira linha tenha 1 soldado, a segunda 2 soldados, a terceira 3, a quarta 4 e assim por diante. Quantas linhas de soldados terá?

Seja l o número de soldados na última linha, l é também o número de linhas. A soma dos termos da progressão

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, l$$

é:

$$S = \left(\frac{1 + l}{2} \right) l$$

Daí se deduz a equação

$$l^2 = 3321 \quad \text{ou} \quad l^2 - 3321 = 0$$

Resolvendo $l^2 - 3321 = 0$. O triângulo terá, pois, 57 linhas.

PROBLEMAS SOBRE AS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1685. Formar uma progressão aritmética de 8 termos cuja razão seja 10 e o primeiro termo 90.

1686. Formar uma progressão de 10 entre de 8 termos se o primeiro é 1 600 e a razão 75.

1687. Formar uma progressão de 8 termos cuja razão seja $\frac{1}{2}$.

1688. A partir do 7.º termo de uma progressão aritmética, a soma dos termos é 10 e a razão é $\frac{1}{2}$.

1689. O 1.º termo de uma progressão é $-\frac{1}{2}$ e a razão 10. Achar o 21.º termo.

1690. O 1.º termo de uma progressão é 4, o último 94 e a razão 6. Achar o número dos termos.

1691. Que dois termos têm uma progressão, sabendo que o 1.º é $ax-2y$, o último $3y$, e a razão $y-x$?

1692. O 31.º termo de uma progressão é 2 e a razão $\frac{1}{2}$. Qual é o 1.º termo?

1693. Achar o 1.º termo de uma progressão na qual o 20.º termo é 10 e a razão $\frac{1}{2}$.

1694. Dada a progressão

67

calcular o número e a soma dos termos.

1695. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1696. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1697. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1698. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1699. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1700. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1701. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1702. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1703. Uma progressão aritmética tem 10 termos e a soma dos termos é 100. Achar o primeiro termo e a razão.

1693. O 1.º termo de uma progressão é 4 e a razão $\frac{1}{2}$. Achar o 21.º termo.

1694. Uma progressão aritmética tem 14 termos e a soma dos termos é 336. Achar o número dos termos e a razão.

1695. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1696. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1697. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1698. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1699. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1700. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1701. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1702. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1703. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1704. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1705. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1706. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1707. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1708. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1709. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1710. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1711. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1712. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1713. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1714. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1715. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1716. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1717. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1718. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1719. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1720. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1721. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1722. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1723. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1724. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1725. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1726. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1727. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1728. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1729. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1730. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1731. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1732. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1733. Uma progressão aritmética tem 12 termos, calcular sua razão.

1718. Se esse relogio ha esse as horas sem repetição e a um esse apenas as meias horas e por uma horaada só que as horas e as meias por dia?

1719. Um coronel dispõe parte de seu regimento num triângulo cheio colocando um homem na primeira linha, dois na segunda, tres na 3ª e assim por diante. Formo assim um triângulo de 231 homens. Havia quantos homens do regimento?

1720. Os ângulos de um triângulo rectângulo estão em progressão arithmetica. Achar os ângulos.

1721. Num octógono convexo, os ângulos estão em progressão arithmetica de razão 5°. Achar esses ângulos.

1722. Quantos termos se devem tomar na progressão

$$1, 2, 3, \dots$$

para que a soma seja 690?

1723. Achar 6 números em progressão arithmetica, de modo que a 1ª desseos números é 4,5 e a soma dos termos é 19,50.

1724. Tres pessoas foram compradas 30 metros de fundo. Para a primeira pessoa foram comprados 10 metros, para a segunda 15 metros e para a terceira 5 metros. Quantos metros foram comprados para cada uma das pessoas?

1725. Achar 4 números em progressão arithmetica tais que os dois meios tenham 86 100 por produto, e os extremos 6100.

1726. Tres números em progressão arithmetica têm por soma 51, e 6814 por produto. Achar estes números.

1727. Marcam-se 10 pontos numa circumferência e une-se cada um a todos os outros por linhas retas. Quantas retas diferentes se traçam?

1728. O produto dos dois primeiros e dos dois ultimos termos de uma progressão de 5 termos é 481 021, e a razão é 10. Achar a progressão.

1729. A um capital de 100 000\$ em 10 annos. Sabendo que a taxa de juros é 2% e o valor do annuo foi augmentado de uma percentagem, achar a taxa annual do seu rendimento.

1730. Achar o triângulo rectângulo cujos lados são tres números inteiros e tendo de 6,

CAPITULO II

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

I. Definições

250. Progressão geometrica. — Progressão geometrica é uma serie de termos tais que cada um iguala o precedente multiplicado por uma quantidade constante chamada razão.

Representa-se uma progressão geometrica do modo seguinte:

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \dots$$

e designa-se a razão por q .

251. Progressão crescente, decrescente. — Uma progressão geometrica é crescente quando a razão é superior a 1, é decrescente se a razão é menor do que 1.

A progressão

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

é crescente, pois que sua razão é 3.

$$128, 32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

é decrescente, porque sua razão é

$$\frac{1}{2}$$

II. Propriedades das progressões geometricas.

252. Teorema. — Em toda a progressão geometrica, qualquer termo é igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada a uma potencia.

Seja a progressão de n termos

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \dots$$

ra. elev. curso medio.

Tomamos por definição:

$$b = aq$$

$$c = bq$$

$$d = cq$$

$$l = hq$$

$$l = kq$$

Fazendo o produto termo a termo, temos:

$$b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot h \cdot l$$

ou seja:

$$b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot h \cdot l = a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot \dots \cdot aq^{n-2} \cdot aq^{n-1}$$

25a. Corolário. A fórmula (h) resolve-se:

$$(h) \quad l = aq^{n-1}, \quad q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} \quad (i)$$

$$a = \frac{l}{q^{n-1}} = \frac{l}{\left(\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}\right)^{n-1}}$$

25a. Aplicações. 1.º Achar o 7.º termo da progressão

Tomamos:

$$l = aq^6 = 3 \cdot 3^6 = 3^7 = 3137$$

2.º Achar o primeiro termo de uma progressão

A fórmula (i) dá:

$$a = \frac{l}{q^{n-1}} = \frac{1.80}{2^7} = \frac{1.80}{128} = 10$$

3.º Achar a razão da progressão de 9 termos

A fórmula (i) dá:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} = \sqrt[8]{\frac{781.250}{1}}$$

4.º Achar o número dos termos de uma progressão, se o primeiro termo é 1 e o último é 1.250.

A fórmula (i) dá:

$$3^{n-1} = \frac{2^7 \cdot 1}{1} = 720$$

Logo, a equação iguala 720 a 3ⁿ

$$3^4 = 81 < 720 < 3^5 = 243$$

25b. Teorema. — Em toda a progressão geométrica o produto de todos os termos é igual ao produto dos extremos.

Seja a progressão

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$$

Consideremos o termo d que tem m termos antes, e o termo h que tem n termos depois. Temos:

$$d = aq^m \quad e \quad h = lq^n$$

Fazendo-se o produto destas duas igualdades vem:

$$d \cdot h = a \cdot l \cdot q^{m+n}$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

$$d \cdot h = a \cdot l \quad \text{ou} \quad d \cdot h = a \cdot l$$

Seja a progressão de n termos:

$$a, b, c, d, \dots, k, l$$

ou seja

$$P = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot k \cdot l$$

ou

$$P = [a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot k \cdot l] \cdot a$$

Fazendo o prod. to dessas duas igualdades, temos

$$P^2 = a l \cdot b k \cdot c j \cdot d i \cdot \dots \cdot d i \cdot c j \cdot b k \cdot a l$$

Mas cada um dos n factores al, bk, cj, \dots é igual ao pro-

duto $a \cdot l, b \cdot k, c \cdot j, \dots$ da 1.ª e 2.ª progressões

$$P^2 = a l \cdot a l \cdot \dots \cdot a l \cdot a l \cdot \dots \cdot a l \cdot a l = a^{2n}$$

donde:

$$P = \sqrt[n]{a^{2n}} = a^n$$

Aplicação — achar o produto $7 \times 31 \times 127 \times 385 \dots$

a) achar os primeiros e últimos termos das progressões.
A primeira k

$$2^{k-1} = \frac{1}{2}$$

1.

$$3^{n-1} = \frac{507}{7} = 81 = 3^4$$

Logo

$$n = 5$$

Seus, pois.

$$P = \sqrt[5]{7^5 \times 507^5} = 1092 \times 31 \times 542$$

Teorema — A soma dos termos de uma progressão geométrica se acha fazendo o produto do último termo pela razão, com o produto esse produto do primeiro termo, e o resultado é resto pela razão menos um.

Seja a progressão:

$$a, b, c, d, \dots, k, l$$

Temos:

$$b = a + b \quad d = a + \frac{1}{2} k + l \quad 1$$

Multiplicando os dois membros por q , essa equação dá:

$$S q = a q + b q + c q + d q + \dots + k q + l q$$

Mas, por definição, temos:

$$a q = b, \quad b q = c, \quad c q = d, \dots, k q = l$$

e a equação precedente vem a ser, pois,

$$S q = b + c + d + \dots + l + l q \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), temos

donde:

$$S(q-1) = l - a,$$

ou ainda:

$$S = \frac{l - a}{q - 1}$$

259 Corolário I — Na fórmula precedente (m , substituído por q^{n-1} , vem:

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

260 Corolário II — Quando a progressão é decrescente, como $q < 1$ e $q^n < 1$; portanto, os dois termos da fração $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ são negativos; mudando os sinais, temos:

$$S = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

Temos também:

Teorema — A soma dos termos de uma progressão geométrica se acha fazendo o produto do último termo pela razão, com o primeiro termo da 1.ª do pelo excesso da unidade sobre a razão.

A soma dos termos de uma progressão geométrica qual-quer (258, 1)

$$S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S = \frac{a - l q}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{l q}{1 - q}$$

Como os termos da progressão vão decrescendo indefinidamente, o 1.º, no termo 1 tendo cada vez mais para zero.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Apodemos a primeira parcela da soma

Temos 201

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

IV. Resolução do problema

202. Problema I. achar o 10º termo da progressão,

81

Temos

$$1 = a \cdot q^n = 81 < \frac{1}{9} = 3^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{81}$$

203. Problema II. achar a soma dos termos da progressão precedente

Temos, a

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

204. Problema III. achar a soma dos termos da progressão precedente

$$S = \frac{547}{1000} + \frac{547}{1000^2} + \frac{547}{1000^3} + \dots$$

O segundo termo é uma progressão geométrica de termos

temos

$$S = \frac{547}{1000} + \frac{547}{1000^2} + \frac{547}{1000^3} + \dots$$

Problema IV. Um carro, que faz a legua por hora, anda 3 horas antes de outra e depois que o segue com uma velocidade de triplo. Quantas leguas percorrerá a segunda antes de alcançá-lo?

Resposta. O primeiro, que anda 3 vezes menos depressa, percorre 3/3 da legua, ou 2 leguas.

Logo, quando o segundo percorrer essas 2 leguas o primeiro estará 2/3 da legua

percorrendo 2/3 da legua, o segundo, por diante

o modo que o segundo para alcançar o primeiro será obrigado a percorrer um número de leguas representado por

$$8 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \dots$$

A soma dos termos, em número infinito, desta progressão

$$S = 8 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \dots$$

Resposta 6 leguas.

PROBLEMAS SOBRE AS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

1731. A soma dos termos de uma progressão geométrica é 12 e o termo 1.º é 1. achar o primeiro termo

1732. O 10º termo de uma progressão é 20 e o 1.º termo é 2. Qual a razão da progressão?

1733. O 10º termo de uma progressão é 20 e o 1.º termo é 2. Qual a razão da progressão?

1734. A soma dos termos de uma progressão geométrica é 12 e o termo 1.º é 1. achar o primeiro termo

1735. Qual o 10º termo de uma progressão geométrica em que o 1.º termo é 2 e a razão é 2?

1736. A soma dos termos de uma progressão geométrica é 12 e o termo 1.º é 1. achar o primeiro termo

1737. O primeiro é 2 e a razão é 2. Qual o 10º termo?

1738. O primeiro é 2 e a razão é 2. Qual o 10º termo?

1739. O primeiro é 2 e a razão é 2. Qual o 10º termo?

1740. O primeiro é 2 e a razão é 2. Qual o 10º termo?

1741. O primeiro é 2 e a razão é 2. Qual o 10º termo?

Calcular a soma dos 3 primeiros termos de cada uma das duas progressões seguintes

$$1784. \frac{4}{5} + 1 + \frac{5}{4} = \frac{25}{18}$$

$$1785. a + \frac{x}{1-y} + \frac{x^2}{(1-y)^2} + \frac{x^3}{(1-y)^3}$$

Achar a fração geratriz de cada uma das frações periódicas dadas

$$1786. 0,522\ 522\ 522$$

$$1789. 4,22\ 22\ 22 \dots$$

$$1787. 0,444444$$

$$1791. 0,12\ 3333$$

$$1788. 0,0499999$$

$$1792. 42,23\ 12\ 12\ 12$$

$$1789. 0,01\ 01\ 01\ 01$$

$$1793. 1,278\ 9999$$

1784. Repetir 65 em 3 por 5, p. ativas que estejam em progressão geométrica e ao modo para 9. x de a 1. de 10.

1786. Achar os 4 ângulos de um quadri lateral, sabendo que formam uma progressão geométrica e o 3º vale 9 vezes o 1º.

1788. Achar uma progressão geométrica de 3 termos cuja razão seja a raiz cúbica de 2º termo, e cujos 2º e 3º termos tenham 10 por soma.

1787. A soma das arestas de um paralelepípedo retângulo é 4. Achar as arestas sabendo que formam uma progressão geométrica e sabendo em 1,6 dm³ por volume.

1788. Num círculo se inscrevem dois e dois pontos no 1º e 2º arcos, e ao 1º, 18 ao 1º, ao 2º e 3º, quantos pontos teria de dar a 1ª.

1789. Para fazer um jogo de 40 m de fundo um operário propõe fazer o trabalho, recebendo 24 para o 1º metro, 48 para o 2º, 88 para o 3º, e assim por diante. Como se avaliaria a proposta?

APÊNDICE

CONDIÇÕES DE RESOLUÇÃO

Para a resolução dos problemas: *Base de logaritmos* e *Algebra* de T. D. *Curso Superior*, Número 338 e seguintes.

1. Definições.

559. Definição dos logaritmos. — Logaritmos são os números de uma progressão aritmética, tendo por 0, que

correspondem termo a termo aos números de uma progressão geométrica começando por 1.

Sejam as duas progressões

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (1)$$

que 1, primeiro da segunda progressão é o logaritmo do número correspondente da primeira. Assim, 0 é o logaritmo de 1, 1 é o logaritmo de 2, 2 é o de 3, 3 é o de 4, 4 é o de 5, etc.

Então, a base do logaritmo precedente, a unidade, é o primeiro termo da progressão aritmética, e o logaritmo da unidade é o primeiro termo da progressão geométrica. Assim, a base do logaritmo é o primeiro termo da progressão aritmética, e o logaritmo da unidade é o primeiro termo da progressão geométrica.

A inserção da unidade na progressão aritmética, e na progressão geométrica, é feita da seguinte maneira:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (1)$$

Se 0 é o logaritmo do primeiro termo da progressão aritmética, e se a progressão aritmética segue as duas progressões

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (1)$$

que as frações têm logaritmos negativos

2. Sistemas de logaritmos. — Sistema de logaritmos é o conjunto de duas progressões, uma geométrica com razão r e outra, aritmética com razão d , tendo por 0. Essas duas progressões são chamadas de progressões logarítmicas.

É evidente que há uma correspondência entre os logaritmos, de um lado, e os números da progressão geométrica, de outro lado, por 1, e assim, para qualquer x , a progressão aritmética, começando por 0.

3. Base de um sistema de logaritmos. — Base de um sistema de logaritmos é o número a que tem a propriedade de ser o primeiro termo da progressão aritmética, e o primeiro termo da progressão geométrica.

Na tabela

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (1)$$

a base é 5, porque $\log 5 = 1$.

270. Observação. — Os números negativos não têm logaritmos. — Com efeito como a base é positiva, todas as potências são positivas, portanto, todos os números da progressão geométrica são positivos.

II Propriedades dos logaritmos.

271. Teorema. — O logaritmo de um produto é igual a soma dos logaritmos dos factores.

Seja a um número logaritmico:

$$\begin{array}{r} 1 : a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4, a^5 \cdot a^6 \cdot a^7 \cdot a^8 \\ + 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \end{array}$$

no qual qualquer número da progressão geométrica tem sua expressão por logaritmo.

Sejam ainda os números:

$$A=a^3, \quad B=a^5, \quad C=a^7$$

O produto dessas 3 grandezas mantendo a unidade é:

$$A \cdot B \cdot C = a^{15}$$

Neste exemplo $A \cdot B \cdot C = a^{15}$ é igual a a^{15} logo $1 + 2 + 3 = 6$ e número $3+5+7$, portanto, temos

$$\log(ABC) = 3+5+7 = \log A + \log B + \log C.$$

Exemplo:

$$\log(2 \times 3 \times 4 \times 5) = \log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5.$$

272. Teorema. — O logaritmo de um quociente é igual ao logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor.

Seja Q o quociente de A por B , temos a identidade:

$$A=BQ \quad \text{ou} \quad \log A = \log(BQ).$$

Mas, o teorema precedente dá:

$$\log BQ = \log B + \log Q.$$

portanto:

$$\log A = \log B + \log Q.$$

onde vem

$$\log Q = \log A - \log B.$$

Se Q igua a $\frac{A}{B}$, temos então:

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\text{Exemplo:} \quad \log \frac{10}{1} = \log 10 - \log 1.$$

273. Teorema. — O logaritmo de uma potência de um número é igual ao logaritmo do número multiplicado pelo expoente.

Exemplo seja A^3 então:

$$A^3 = A \times A \times A.$$

do:

$$\log A^3 = \log A + \log A + \log A = 3 \log A.$$

em geral:

$$\log A^m = m \log A$$

$$\text{Exemplo:} \quad \log 10^7 = 7 \log 10$$

4.º Corolário I. — O logaritmo do infinito é o infinito.

Seja a expressão logaritmica:

$$\log a^n = n \log a.$$

Como a é a base temos

$$\log a = 1$$

então

$$\log a^n = n$$

Se n se torna infinito a^n se torna também infinito, e podemos escrever

$$\log \infty = \infty$$

Corolário II. — O logaritmo de 0 é igual a $-\infty$.

Se

$$\log \frac{1}{n} = \log 1 - \log n = 0 - \log n = -\log n$$

Se n se torna infinito, $\frac{1}{n}$ se torna nulo, e podemos escrever

$$\log 0 = -\log \infty = -\infty.$$

Teorema

o logaritmo de um número é a potência a que se tem de elevar a base para obter o número.

Provas das por exemplo

$$\log_{11} 11 = \frac{\log 11}{\log 11}$$

Com efeito, fazemos

$$x = 11$$

Logo $\log_{11} 11 = 1$

$$x^y = 11$$

Logo $\log_{11} x^y = y$

$$\log_{11} 11 = 1$$

Logo $\log_{11} 11 = 1$

$$\log_{11} 11 = 1$$

$$\log_{11} 11 = 1$$

$$\log_{11} 11 = 1$$

III Logaritmos vulgares

Definição

Os logaritmos vulgares são os logaritmos de base 10.

$$10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000, \dots$$

Do estudo desse sistema, deduzem-se varias consequências.

1.º Os logaritmos de potências de 10 são logaritmos inteiros.

Assim

$$\log 10^2 = 2, \log 10^{-2} = -2; \text{ etc}$$

4.º As potências de 10 têm logaritmos inteiros.

Logo os seus logaritmos são:

$$\log 10 = 1, \log 10^2 = 2, \log 10^3 = 3$$

5.º As frações decimais têm logaritmos negativos.

Logo os seus logaritmos são:

$$\log 10^{-1} = -1, \log 10^{-2} = -2, \log 10^{-3} = -3$$

$$\log 10^{-4} = -4$$

6.º Os números compreendidos entre 1 e 10 têm logaritmos compreendidos entre 0 e 1.

Logo os logaritmos de números compreendidos entre 1 e 10 são:

$$\log 1 = 0, \log 2 = 0,3010, \log 3 = 0,4771, \dots$$

Logo os logaritmos de números compreendidos entre 1 e 10 são:

$$\log 1 = 0, \log 2 = 0,3010, \log 3 = 0,4771, \dots$$

Logo os logaritmos de números compreendidos entre 1 e 10 são:

$$\log 1 = 0, \log 2 = 0,3010, \log 3 = 0,4771, \dots$$

7.º Teorema. A característica do logaritmo de um número é um inteiro compreendido entre 0 e 9.

Logo os logaritmos de números compreendidos entre 1 e 10 são:

$$\log 1 = 0, \log 2 = 0,3010, \log 3 = 0,4771, \dots$$

Logo os logaritmos de números compreendidos entre 1 e 10 são:

$$\log 1 = 0, \log 2 = 0,3010, \log 3 = 0,4771, \dots$$

Logo os logaritmos de números compreendidos entre 1 e 10 são:

$$\log 1 = 0, \log 2 = 0,3010, \log 3 = 0,4771, \dots$$

Logo os logaritmos de números compreendidos entre 1 e 10 são:

$$\log 1 = 0, \log 2 = 0,3010, \log 3 = 0,4771, \dots$$

Logo a fração decimal

$$N = 0,000\ 004\ 567\ 8$$

tem os logaritmos dos seus membros, terentes.

$$\log N = \log 456789 - \log 10^8 = \log 456789 - 8$$

Logo o número 456789 tem o logaritmo compreendido

Podemos escrever

$$1^{\circ} \log a^2 b^3 c = \log a^2 + \log b^3 + \log c = 2 \log a + 3 \log b + \log c.$$

$$2^{\circ} \log \frac{a^2 b}{c} = \log a^2 + \log b - \log c = 2 \log a + \log b - \log c.$$

$$3^{\circ} \log \sqrt[3]{a^2 b^3} = \frac{1}{3} (\log a^2 + \log b^3) = \frac{2 \log a + 3 \log b}{3}.$$

$$4^{\circ} \log \frac{a^2 b^3}{c^4} = \log a^2 + \log b^3 - \log c^4 = 2 \log a + 3 \log b - 4 \log c.$$

$$5^{\circ} \log \sqrt[4]{a^2 b^3 c^4} = \frac{1}{4} (\log a^2 + \log b^3 + \log c^4) = \frac{2 \log a + 3 \log b + 4 \log c}{4}.$$

$$6^{\circ} \log \sqrt[5]{a^2 b^3 c^4} = \frac{1}{5} (\log a^2 + \log b^3 + \log c^4) = \frac{2 \log a + 3 \log b + 4 \log c}{5}.$$

$$7^{\circ} \log \sqrt[6]{a^2 b^3 c^4} = \frac{1}{6} (\log a^2 + \log b^3 + \log c^4) = \frac{2 \log a + 3 \log b + 4 \log c}{6}.$$

288. Problema II. — Que indica a expressão

$$\log a + 4 \log b - \frac{4 \log c}{3}.$$

Resposta:

$$1^{\circ} 4 \log b = \log b^4.$$

$$2^{\circ} \log a + 4 \log b = \log ab^4.$$

$$3^{\circ} 4 \log c = \log c^4.$$

$$4^{\circ} \frac{4 \log c}{3} = \log \sqrt[3]{c^4}.$$

Portanto:

$$\log a + 4 \log b - \frac{4 \log c}{3} = \log ab^4 - \log \sqrt[3]{c^4} = \log \frac{ab^4}{\sqrt[3]{c^4}}.$$

289. Problema III. — Transformar a expressão $\log 0,0047$ em log

$$\log 0,0047 = \log \frac{47}{10^4} = \log 47 - \log 10^4 = \log 47 - 4.$$

290. Problema IV. — Sabendo que

$$\log 2 = 0,3010300 \text{ e } \log 3 = 0,4771213,$$

calcular a expressão

$$\log \frac{2^3 3^2}{\sqrt{18}}.$$

temos logo

$$\log 3 = \log \frac{6}{2} = \log 6 - \log 2 = 0,8010300.$$

Logo:

$$\log \sqrt[3]{18} = \log 18^{\frac{1}{3}} = \log 2 + \log 3 + \log \sqrt[3]{6} = \log 2 + \log 3 + \frac{1}{3} \log 6.$$

Logo podemos escrever:

$$\log 3^2 = 2 \log 3 = 2 \times 0,4771213 = 0,9542426$$

$$\log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \times 0,3010300 = 0,9030900.$$

$$\log \sqrt[3]{18} = \frac{0,9542426 + 0,9030900}{3} = 0,6191112.$$

$$\log 18 = \frac{1}{3} (\log 2 + \log 3) = \frac{1}{3} (0,3010300 + 0,4771213) = 0,2390751.$$

Logo:

$$\log \frac{2^3 3^2}{\sqrt{18}} = \log 2^3 + \log 3^2 - \log \sqrt{18} = 0,9030900 + 0,9542426 - 0,4771213 = 1,3802113.$$

Problema V. — Achar a característica do logaritmo de 4 para os números seguintes

$$1^{\circ} 0,00004531, \quad 2^{\circ} 123456789$$

Resposta: 1. Para o número 0,00004531, a característica é 5, porque o número está entre 10⁻⁵ e 10⁻⁴.
2. Para o número 123456789, a característica é 8, porque o número está entre 10⁸ e 10⁹.

Como o número 123456789 tem 9 algarismos, a característica de seu logaritmo tem 8 unidades.

Problema VI. — Sabendo que

$$\log 2 = 0,3010300 \text{ e } \log 3 = 0,4771213,$$

calcular a expressão

$$\log \frac{2^3 3^2}{\sqrt{18}} = \log 2^3 + \log 3^2 - \log \sqrt{18} = 0,9030900 + 0,9542426 - 0,4771213 = 1,3802113.$$

Logo:

$$\log \frac{2^3 3^2}{\sqrt{18}} = \log 2^3 + \log 3^2 - \log \sqrt{18} = 0,9030900 + 0,9542426 - 0,4771213 = 1,3802113.$$

ou ainda

$$\log \frac{2^3}{3^4} = 0,908\,090 - 1,008\,485$$

ou seja $\log x = -1$

$$-1,908\,485 + 0,908\,090 = -1,000\,395$$

Logo $x = 10^{-1,000\,395} = 0,100091$

$$x = 10^{-1,000\,395} = 10^{-1} \cdot 10^{-0,000\,395}$$

$$= 0,1 \cdot 10^{-0,000\,395} = 0,1 \cdot 0,99937 = 0,099937$$

Logo $x = 0,1$

4.3. **Problema VII.** Temos $\log x = \log a$, que referido a e entre x e a ?

As potências iguais têm mesmo logaritmo e reciprocamente

4. **Problema VIII.** Resolver o sistema de

$$\log x + \log y = 2 \quad \log x - \log y = 0.$$

Se damos membro a membro as duas equações temos

$$2 \log x = 2 \quad \text{ou} \quad \log x = 1$$

donde:

$$x = 10.$$

$$\log x + \log y = 2 \quad \log 10 + \log y = 2$$

$$2 \log y = 2 \quad \text{ou} \quad \log y = 1;$$

portanto

$$y = 10.$$

$$10 = 10$$

$$10$$

EXERCÍCIOS SOBRE AS PROPRIEDADES DO LOGARITMO

2. Usando as propriedades dos logaritmos, calcule

$$1800 \quad 1 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$1801 \quad 1 - 2, 2 - 1, 1 - 3, 3 - 2, 3 - 3, 3 - 4, 3 - 5$$

4.3.3.3

$$1802 \quad 1 - 2, 2 - 1, 3 - 2, 4 - 3, 5 - 4$$

1803 $\log a + \log b = \log ab$

$$1804 \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$1805 \quad \log a + \log b = \log ab$$

$$1806 \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$1807 \quad \log a + \log b = \log ab$$

$$1808 \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$1809 \quad \log a + \log b = \log ab$$

$$1810 \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$1811 \quad \log (6^3 \times 2^4)$$

$$1812 \quad \log \frac{1}{11}$$

$$1813 \quad \log \frac{5^2}{4^3}$$

$$1814 \quad \log \frac{2^3 \times 5^2}{3^4}$$

$$1815 \quad \log \frac{1}{11}$$

$$1816 \quad \log \frac{1}{11}$$

$$1817 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1818 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1819 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1820 \quad \log \frac{5}{13}$$

$$1821 \quad \log \frac{a^4 - b^4}{a^4 - b^4}$$

$$1822 \quad \log \frac{1}{11}$$

$$1823 \quad \log \frac{1}{11}$$

$$1824 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1825 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1826 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1827 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1828 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1829 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1830 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1831 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1832 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1833 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1834 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1835 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1836 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1837 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1838 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1839 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1840 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1841 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1842 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1843 \quad \log \sqrt[3]{5}$$

$$1844 \quad \log \sqrt[4]{2}$$

$$1805 \quad 5^3$$

$$1806 \quad 1$$

$$1807 \quad 1$$

$$1808 \quad 1$$

$$1809 \quad 1$$

$$1810 \quad 1$$

$$1811 \quad 1$$

$$1812 \quad 1$$

$$1813 \quad 1$$

$$1814 \quad 1$$

$$1815 \quad 1$$

$$1816 \quad 1$$

$$1817 \quad 1$$

$$1818 \quad 1$$

$$1819 \quad 1$$

$$1820 \quad 1$$

$$1821 \quad 1$$

$$1822 \quad 1$$

$$1823 \quad 1$$

$$1824 \quad 1$$

$$1825 \quad 1$$

$$1826 \quad 1$$

$$1827 \quad 1$$

$$1828 \quad 1$$

$$1829 \quad 1$$

$$1830 \quad 1$$

$$1831 \quad 1$$

$$1832 \quad 1$$

$$1833 \quad 1$$

$$1834 \quad 1$$

$$1835 \quad 1$$

$$1836 \quad 1$$

$$1837 \quad 1$$

$$1838 \quad 1$$

$$1839 \quad 1$$

$$1840 \quad 1$$

$$1841 \quad 1$$

$$1842 \quad 1$$

$$1843 \quad 1$$

$$1844 \quad 1$$

$$1845 \quad 1$$

$$1846 \quad 1$$

$$1847 \quad 1$$

$$1848 \quad 1$$

$$1849 \quad 1$$

$$1850 \quad 1$$

$$1851 \quad 1$$

$$1852 \quad 1$$

$$1853 \quad 1$$

$$1854 \quad 1$$

$$1855 \quad 1$$

$$1856 \quad 1$$

$$1857 \quad 1$$

$$1858 \quad 1$$

$$1859 \quad 1$$

$$1860 \quad 1$$

$$1861 \quad 1$$

$$1862 \quad 1$$

$$1863 \quad 1$$

$$1864 \quad 1$$

$$1865 \quad 1$$

$$1866 \quad 1$$

$$1867 \quad 1$$

$$1868 \quad 1$$

$$1869 \quad 1$$

$$1870 \quad 1$$

$$1871 \quad 1$$

$$1872 \quad 1$$

$$1873 \quad 1$$

$$1874 \quad 1$$

$$1875 \quad 1$$

$$1876 \quad 1$$

$$1877 \quad 1$$

$$1878 \quad 1$$

$$1879 \quad 1$$

$$1880 \quad 1$$

$$1881 \quad 1$$

$$1882 \quad 1$$

$$1883 \quad 1$$

$$1884 \quad 1$$

$$1885 \quad 1$$

$$1886 \quad 1$$

$$1887 \quad 1$$

$$1888 \quad 1$$

$$1889 \quad 1$$

$$1890 \quad 1$$

$$1891 \quad 1$$

$$1892 \quad 1$$

$$1893 \quad 1$$

$$1894 \quad 1$$

$$1895 \quad 1$$

$$1896 \quad 1$$

$$1897 \quad 1$$

$$1898 \quad 1$$

$$1899 \quad 1$$

$$1900 \quad 1$$

$$1901 \quad 1$$

$$1902 \quad 1$$

$$1903 \quad 1$$

$$1904 \quad 1$$

$$1905 \quad 1$$

$$1906 \quad 1$$

$$1907 \quad 1$$

$$1908 \quad 1$$

$$1909 \quad 1$$

$$1910 \quad 1$$

$$1911 \quad 1$$

$$1912 \quad 1$$

$$1913 \quad 1$$

$$1914 \quad 1$$

$$1915 \quad 1$$

$$1916 \quad 1$$

$$1917 \quad 1$$

$$1918 \quad 1$$

$$1919 \quad 1$$

$$1920 \quad 1$$

$$1921 \quad 1$$

$$1922 \quad 1$$

$$1923 \quad 1$$

$$1924 \quad 1$$

$$1925 \quad 1$$

$$1926 \quad 1$$

$$1927 \quad 1$$

$$1928 \quad 1$$

$$1929 \quad 1$$

$$1930 \quad 1$$

$$1931 \quad 1$$

$$1932 \quad 1$$

$$1933 \quad 1$$

$$1934 \quad 1$$

$$1935 \quad 1$$

$$1936 \quad 1$$

$$1937 \quad 1$$

$$1938 \quad 1$$

$$1939 \quad 1$$

$$1940 \quad 1$$

$$1941 \quad 1$$

$$1942 \quad 1$$

$$1943 \quad 1$$

$$1944 \quad 1$$

$$1945 \quad 1$$

$$1946 \quad 1$$

$$1947 \quad 1$$

$$1948 \quad 1$$

$$1949 \quad 1$$

$$1950 \quad 1$$

$$1951 \quad 1$$

$$1952 \quad 1$$

$$1953 \quad 1$$

$$1954 \quad 1$$

$$1955 \quad 1$$

$$1956 \quad 1$$

Transformar as seguintes diferenças em números positivos, com mantissas positivas:

1850 - 4,39 208	1854 - 0,13 283
1851 - 7 58 246	1855 - 1,16 711
1852 - 0,27 521	1856 - 4,11 001
1858 - 2 58 937	1857 - 0,01 072

Tornar imediatamente negativos os logaritmos seguintes

1858 - 4 39 571	1862 7,08 781	1866 5,61 725
1859 - 4 39 571	1863 7,00 002	1867 6,00 284
1860 2 29 753	1864 7,10 185	1868 1 09 982
1861 3,48 210	1865 2,85 612	1869 1,00 021

EXERCÍCIOS SOBRE OS LOGARITMOS VULGARES

Sabendo que

$$\begin{aligned}\log 2 &= 0,301 0300 \\ \log 3 &= 0,477 121 \\ \log 5 &= 0,698 9700\end{aligned}$$

Calcular as expressões seguintes:

1870. $\log 4$	1880. $\log \sqrt{5}$
1871. $\log 10$	1887. $\log \sqrt[3]{5}$
1872. $\log 4$	1888. $\log \sqrt[5]{50}$
1873. $\log 0$	1889. $\log \sqrt[3]{3600}$
1874. $\log 10$	1890. $\log \sqrt[3]{3600}$
1875. $\log 30$	1890. $\log \sqrt[3]{3600}$
1876. $\log 300$	1890. $\log \sqrt[3]{3600}$
1877. $\log 30$	1891. $\log 64$
1878. $\log 200000$	1892. $\log 64$
1879. $\log 5000$	1893. $\log 64$
1880. $\log 36$	1894. $\log 64$
1881. $\log 900$	1895. $\log 64$
1882. $\log 100$	1896. $\log 64$
1883. $\log 10$	1897. $\log 64$
1884. $\log 10$	1898. $\log 64$
1885. $\log 12$	1899. $\log 64$
	1900. $\log 64$
	1901. $\log 64$

1902. $\log 15/7$ 1903. $\log 15/7$ 1904. $\log 15/7$ 1905. $\log 15/7$ 1906. $\log \sqrt{\frac{5}{6}}$ 1907. $\log 10^3 \times \sqrt{15}$ 1908. $\log \sqrt[3]{6}$ 1909. $\log \sqrt[3]{6 \times 3 \times 2}$

1910.

1917. $\log 144$ 1923. $\log \sqrt{36}$

1911.

1918. $\log 72$ 1924. $\log 15^4$

1912.

1919. $\log 1/3$ 1925. $\log \sqrt[3]{144}$

1913.

1920. $\log 0,9$ 1926. $\log \frac{1}{72}$

1914.

1921. $\log 0,008$ 1927. $\log \frac{1}{144}$

1915.

1922. $\log \sqrt[3]{15}$ 1928. $\log \frac{1}{144}$

1916.

Achar em logaritmos vulgares os caracteres, das seguintes expressões

1828.

1833. 0,47,25

1938. 0,002

1829.

1834. 1 125

1939. 0,285

1830.

1835. 0,07

1940. 0,000 0582

1831.

1838. 0,000 0451

1841. 0,000 000 18589

1832.

1837. 4 5667608

1942. 0,000 042 307

Sabendo que $\log 67852 = 1,631 5627$ achar

1943. $\log 0,7852$ 1949. $\log 0,67852$ 1944. $\log 0,78 52$ 1950. $\log 0,78 5200$ 1945. $\log 0,000 078 52$ 1951. $\log 67852^3$ 1946. $\log 0,000 000 678 52$ 1952. $\log 67852^4$ 1947. $\log 67,852^3$ 1953. $\log \sqrt[3]{67852}$ 1948. $\log 0,67852^3$ 1954. $\log \sqrt[3]{0,78 52}$

CAPÍTULO IV

EMPREGO DAS TABELAS DE LOGARITMOS

1. Preliminares

295. Definições. Tabela de logaritmos é a coleção de logaritmos de números positivos, desde a unidade até um certo dado

price paid for the property

[illegible]

Apheligenes

1. 5

5. 10

log. 451 = 2.653 713 84

5. Other (e.g., 28.1).

Sebe nos que as milhares dos logaritmos de 2 789 27 800
278 000 2 781 000 etc. são dadas (28)

A caracteristica e o nº 279,
Logo ;

1. 1988 4 0

А. КДН 1896 с 01.09 0,05 % и с 01.10 0,05 %
 Б. 470 с 01.09 0,05 % и с 01.10 0,05 %

que, tornando inte.ro, é superior a 10 000.
Aplica-se a regra seguinte.

30. Regra Para se achar o logaritmo de um número de uma ou de dois ou de três ou de quatro ou de cinco ou de six ou de sete ou de oito ou de nove ou de dez ou de onze ou de doze ou de treze ou de quatorze ou de quinze ou de dezesseis ou de dezoito ou de vinte ou de vinte e um ou de vinte e dois ou de vinte e três ou de vinte e quatro ou de vinte e cinco ou de vinte e seis ou de vinte e sete ou de vinte e oito ou de vinte e nove ou de trinta ou de trinta e um ou de trinta e dois ou de trinta e três ou de trinta e quatro ou de trinta e cinco ou de trinta e seis ou de trinta e sete ou de trinta e oito ou de trinta e nove ou de quarenta ou de quarenta e um ou de quarenta e dois ou de quarenta e três ou de quarenta e quatro ou de quarenta e cinco ou de quarenta e seis ou de quarenta e sete ou de quarenta e oito ou de quarenta e nove ou de cinquenta ou de cinquenta e um ou de cinquenta e dois ou de cinquenta e três ou de cinquenta e quatro ou de cinquenta e cinco ou de cinquenta e seis ou de cinquenta e sete ou de cinquenta e oito ou de cinquenta e nove ou de sessenta ou de sessenta e um ou de sessenta e dois ou de sessenta e três ou de sessenta e quatro ou de sessenta e cinco ou de sessenta e seis ou de sessenta e sete ou de sessenta e oito ou de sessenta e nove ou de setenta ou de setenta e um ou de setenta e dois ou de setenta e três ou de setenta e quatro ou de setenta e cinco ou de setenta e seis ou de setenta e sete ou de setenta e oito ou de setenta e nove ou de oitenta ou de oitenta e um ou de oitenta e dois ou de oitenta e três ou de oitenta e quatro ou de oitenta e cinco ou de oitenta e seis ou de oitenta e sete ou de oitenta e oito ou de oitenta e nove ou de noventa ou de noventa e um ou de noventa e dois ou de noventa e três ou de noventa e quatro ou de noventa e cinco ou de noventa e seis ou de noventa e sete ou de noventa e oito ou de noventa e nove ou de cem ou de cem e um ou de cem e dois ou de cem e três ou de cem e quatro ou de cem e cinco ou de cem e seis ou de cem e sete ou de cem e oito ou de cem e nove ou de cento ou de cento e um ou de cento e dois ou de cento e três ou de cento e quatro ou de cento e cinco ou de cento e seis ou de cento e sete ou de cento e oito ou de cento e nove ou de duzentos ou de duzentos e um ou de duzentos e dois ou de duzentos e três ou de duzentos e quatro ou de duzentos e cinco ou de duzentos e seis ou de duzentos e sete ou de duzentos e oito ou de duzentos e nove ou de trezentos ou de trezentos e um ou de trezentos e dois ou de trezentos e três ou de trezentos e quatro ou de trezentos e cinco ou de trezentos e seis ou de trezentos e sete ou de trezentos e oito ou de trezentos e nove ou de quatrocentos ou de quatrocentos e um ou de quatrocentos e dois ou de quatrocentos e três ou de quatrocentos e quatro ou de quatrocentos e cinco ou de quatrocentos e seis ou de quatrocentos e sete ou de quatrocentos e oito ou de quatrocentos e nove ou de quinhentos ou de quinhentos e um ou de quinhentos e dois ou de quinhentos e três ou de quinhentos e quatro ou de quinhentos e cinco ou de quinhentos e seis ou de quinhentos e sete ou de quinhentos e oito ou de quinhentos e nove ou de seiscentos ou de seiscentos e um ou de seiscentos e dois ou de seiscentos e três ou de seiscentos e quatro ou de seiscentos e cinco ou de seiscentos e seis ou de seiscentos e sete ou de seiscentos e oito ou de seiscentos e nove ou de setecentos ou de setecentos e um ou de setecentos e dois ou de setecentos e três ou

[illegible]

Aplv. 708
 709
 710
 711
 712
 713
 714
 715
 716
 717
 718
 719
 720
 721
 722
 723
 724
 725
 726
 727
 728
 729
 730
 731
 732
 733
 734
 735
 736
 737
 738
 739
 740
 741
 742
 743
 744
 745
 746
 747
 748
 749
 750
 751
 752
 753
 754
 755
 756
 757
 758
 759
 760
 761
 762
 763
 764
 765
 766
 767
 768
 769
 770
 771
 772
 773
 774
 775
 776
 777
 778
 779
 780
 781
 782
 783
 784
 785
 786
 787
 788
 789
 790
 791
 792
 793
 794
 795
 796
 797
 798
 799
 800
 801
 802
 803
 804
 805
 806
 807
 808
 809
 810
 811
 812
 813
 814
 815
 816
 817
 818
 819
 820
 821
 822
 823
 824
 825
 826
 827
 828
 829
 830
 831
 832
 833
 834
 835
 836
 837
 838
 839
 840
 841
 842
 843
 844
 845
 846
 847
 848
 849
 850
 851
 852
 853
 854
 855
 856
 857
 858
 859
 860
 861
 862
 863
 864
 865
 866
 867
 868
 869
 870
 871
 872
 873
 874
 875
 876
 877
 878
 879
 880
 881
 882
 883
 884
 885
 886
 887
 888
 889
 890
 891
 892
 893
 894
 895
 896
 897
 898
 899
 900
 901
 902
 903
 904
 905
 906
 907
 908
 909
 910
 911
 912
 913
 914
 915
 916
 917
 918
 919
 920
 921
 922
 923
 924
 925
 926
 927
 928
 929
 930
 931
 932
 933
 934
 935
 936
 937
 938
 939
 940
 941
 942
 943
 944
 945
 946
 947
 948
 949
 950
 951
 952
 953
 954
 955
 956
 957
 958
 959
 960
 961
 962
 963
 964
 965
 966
 967
 968
 969
 970
 971
 972
 973
 974
 975
 976
 977
 978
 979
 980
 981
 982
 983
 984
 985
 986
 987
 988
 989
 990
 991
 992
 993
 994
 995
 996
 997
 998
 999
 1000

$\log 6597281$ como mantissa do $\log 4508$

$$\log 4527,803 = 3,659\ 6310 + 0,000\ 0767 = 3,659\ 7077$$

Logo

$$\log 45.67800 = 1.659\ 7077$$

1991 年 1 月 1 日 至 1991 年 12 月 31 日止
 1991 年 1 月 1 日 至 1991 年 12 月 31 日止
 1991 年 1 月 1 日 至 1991 年 12 月 31 日止

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

Ex 7 503 428-3 878 7515-874 - „JEM dop. ml.130630008.

[illegible]
$$\log 758\,432,8 = 5,879\,7704.$$

1.^o Exemplo

$$\log 0,00045287 =$$

2.^o Exemplo

$$\log 4528 = 3,6551004 \text{ e } d = 0,57$$

Portanto

$$\log 0,00045287 = 3,6551004 - 0,0000700 = 3,6550304$$

$$\log 4528,74 = 3,6551004 - 0,0000700 = 3,6550304$$

$$\log 4528,74 = 3,6551004 - 0,0000700 = 3,6550304$$

$$\log 4528,74 = 3,6551004 - 0,0000700 = 3,6550304$$

Logo

$$\log 0,00045287 = 3,6550304$$

III Segundo problema.

302. Problema geral. — Achar o número que corresponde a tal parte do log.

Para se resolver este problema applica-se a regra seguinte:

303. Regra. — Para se achar o número correspondente

1.^o Caso. — Mantissa do log dado se acha nas taboas.

Se não se encontrar a mantissa do log dado nas taboas, então se multiplica-se ou divide-se por uma potência de 10 tal que a parte inteira tenha um algarismo a mais do que as unidades da característica se ela for positiva (270); se ela for negativa é preciso diminuir o número achado por uma potência de 10, tal que a parte inteira tenha um algarismo a menos do que as unidades da característica (280).

2.^o Caso. — A mantissa do log dado não se acha nas taboas.

Procura-se a mantissa do número imediatamente inferior e toma-se o número correspondente. A este número acrescenta-se uma fração $\frac{1}{10}$ que se reduz a decimais m e a diferença entre a mantissa dada e a imediatamente inferior é d , a diferença entre m e n é n , que representa a diferença entre m e n .

Depois multiplica-se ou divide-se o número achado por uma potência de 10 tal que a parte inteira tenha um algarismo a mais

que as unidades da característica se ela for positiva (270) e se ela for negativa se ela for negativa (280) e o primeiro algarismo significativo do número achado tantos zeros menos quantas unidades negativas ha na característica (280, 281).

Aplicações. 1.^o Achar o número que tem por logaritmo 5,8710248.

A mantissa buscada logaritmo se acha nas taboas da 745 como número correspondente.

A característica 5 indica que o 1.^o zero tem a esquerda na parte inteira (270). O número procurado é pois 745 500.

2.^o Achar o número cujo logaritmo é 1,417707.

A mantissa 417707 não se acha exactamente nas taboas. A mantissa inferior mais próxima é 417508 com uma diferença de 199 e 8745 com o número correspondente. A este último número, é preciso acrescentar a fração

$$\frac{m}{n} = \frac{0417707 - 0417508}{417} = \frac{199}{417} = 0,47$$

Adaptando a regra do 1.^o caso a mantissa 417508 dá 745,40

A parte decimal é 0,47 que se adiciona ao produto da mantissa pelo 10 (270).

O número é 745,40.

3.^o Qual é o número que tem por logaritmo 4,457268.

As taboas não dão a mantissa 5457268, a mantissa inferior mais próxima é 5457109 e o número correspondente é 423. As taboas dão 1071.

$$m = 0457208 - 0457109 = 99$$

$$n = 45851 - 45710 = 141$$

Portanto, o número correspondente é mantissa dada é

$$\frac{m}{n} = \frac{99}{141} = 0,7021$$

A característica 4 indica que ha 3 zeros entre a virgula e o primeiro algarismo significativo (260).

O número correspondente é, pois

$$0,0004231$$

4.^o Achar o número que corresponde ao logaritmo negativo 4,5789228.

Temos nos logaritmos negativos a mantissa 45789228.

5.^o Achar o número que corresponde ao logaritmo negativo 4,5789228.

Temos nos logaritmos negativos a mantissa 45789228.

6.^o Achar o número que corresponde ao logaritmo negativo 4,5789228.

7.^o Achar o número que corresponde ao logaritmo negativo 4,5789228.

8.^o Achar o número que corresponde ao logaritmo negativo 4,5789228.

9.^o Achar o número que corresponde ao logaritmo negativo 4,5789228.

10.^o Achar o número que corresponde ao logaritmo negativo 4,5789228.

IV. Resolução de alguns problemas.

304 Problema I. — Calcular, por meio dos logaritmos, o produto 17×124 e dar o logaritmo final.

Temos

$$\log 17 \times 124 = \log 17 + \log 124$$

Ora, as taboas dão :

$$\log 17 = 1,230 4483$$

$$\log 124 = 2,$$

$$\text{Logo } \log 17 \times 124 = 3,323 8703$$

Resta achar o número correspondente a este logaritmo. Assim, escrevemos

$$1^{\text{a}} \text{ resp. } 1 \quad 2108 \quad 2^{\text{a}} \text{ resp. } 3,323 8703.$$

Problema II. — Fazer a soma dos dois logaritmos

$$5,588 4241 \text{ e } 3,976 5423$$

Escrevem-se estes logaritmos abaixo do outro de modo que as partes decimais fiquem alinhadas.

$$5,588 4241$$

$$3,976 5423$$

$$\hline 9,564 9664$$

Depois, faz-se a soma do no para dois números ordinários :

$$1+3=4; 4+5=9; 2+4=6; 4+5=9; 3+6=9; 6+7=13;$$

escreve-se 11 e vai 1 para a reserva;

$$1+5+0=15$$

escreve-se 5 e vai 1 para a reserva;

$$1+5=6=3,$$

A soma procurada é 3,539 9664

$$\text{Resp. } 3,539 9664.$$

Problema III. — Somar os dois logaritmos

$$5,476 9341 \text{ e } 2,459 8227$$

$$1 + 5 = 6 = 3$$

$$1,598 227 = (3 - 2,459 8227) = 0,138 3773$$

ou faz-se a soma como no número precedente

$$5,476 9341$$

$$3,540 1773$$

$$\hline 9,017 1114$$

de somar as duas mantissas, vai 1 para a reserva,

$$1 + 5 = 6 = 3$$

A soma é pois

$$\text{Resp. } 7,017 1114$$

Problema IV. — Fazer a subtração seguinte

$$3,273 0745 - 4,059 7122$$

Temos

$$3,273 0745 - 4,059 7122$$

$$0,273 0745 - 4 - 0,059 7122$$

Essa diferença vem a ser

$$4 - 3 + 0,273 0745 - 0,059 7122 = 1 + 0,213 3623$$

$$= 0,013 3623$$

$$\text{Resp. } 0,013 3623$$

Problema V. — Multiplicar por 5 o logaritmo 1,980 4712

Temos

$$1,980 4712 \times 5$$

$$1 + 0,980 4712 \times 5 = 5 + 4,902 3560$$

$$= 5,902 3560$$

$$\text{Resp. } 5,902 3560.$$

Problema VI. — Dividir por 4 o logaritmo 1,578 9236

Acrescenta-se 2 à característica para torná-la divisível

por 4, pois

$$2,578 9236 - 4$$

$$3$$

$$3$$

$$= 0,850 412 - 2$$

$$1,850 412$$

$$\text{Resp. } 2,859 6412.$$

Problema VII. — Achar o produto $1254,56 \times 0,012735$ e dar o logaritmo final.

Seja P este produto, temos

$$\log P = \log 1254,56 + \log 0,012735$$

As taboas dão

$$\log 125456 = 3.0984915$$

$$\log 0.012785 = 2.104993$$

$$\log P = 1.2034714$$

Portanto

$$\text{Resp. } P = 15.97932.$$

Problema VIII - 1. *Seja Q o quociente procurado temos*

$$Q = \frac{123.72}{4597345} \cdot \frac{12}{4597345}$$

donde

$$\log Q = \log 12372 - \log 4597345$$

As taboas dão:

$$\log 12372 = 4.09243$$

$$\log 4597345 = 6.659$$

$$\log P = 4.42998$$

As taboas dão como número correspondente 0.00269123.

$$\text{Resp. } Q = 0.00269123.$$

Problema IX - *calcular*

$$N = \frac{17^2 \times 0.4521^2 \times 4.554}{11}$$

Temos

$$\log N = \log 17^2 + \log 0.4521^2 + \log 4.554 - \log 11$$

Ou as taboas dão

$$\log 17^2 = 2 \log 17 = 2 \times 1.2304489 = 2.4608978$$

$$\log 0.4521^2 = 2 \log 0.4521 = 2 \times 1.6552345 = 3.3104690$$

$$\log 4.554 = 1 \log 4.554 = 1 \times 0.6581 = 0.6581$$

$$-\log 11 = -1.0413927 = 2.9586073$$

$$\log 421 = 1 \log 421 = 1 \times 2.62428 = 2.62428$$

Somando, acabamos,

$$\log N = 2.533031$$

Portanto:

$$\text{Resp. } N = 21.78971.$$

Problema X

har o número dos termos da progressão

$$2; 8; 18; \dots; 4874$$

Teremos:

$$a = 2, q = 2$$

donde

$$\log t = \log a + (n-1) \log q,$$

donde

$$n = \frac{\log t - \log a}{\log q} = \frac{\log 4874 - \log 2}{\log 2}$$

As taboas dão:

$$n = \frac{0.4771213 + 3.0408798 - 0.3010300}{0.4771213} = 8$$

$$\text{Resp. } 8 \text{ termos.}$$

Problema XI

conhecendo-se o primeiro termo 1.000 e o último termo 0.5, e o número 14 dos termos da d. a. progressão aritmética calcular o ração.

A fórmula

$$t = a + (n-1)r$$

é

$$\log t = \log a + (n-1) \log r$$

ou seja no caso:

$$\log q = \frac{\log t - \log a}{n-1} = \frac{\log 0.5 - \log 1.000}{13}$$

Ora

$$\log 0.5 = 9.6989700$$

$$-\log 1.000 = 2.3856063$$

Portanto

$$\log q = \frac{\log 0.5 - \log 1.000}{13} = \frac{9.6989700 - 2.3856063}{13} = 0.552122$$

E as taboas dão como número correspondente

$$\text{Resp. } q = 3$$

Problema XII

Resolver a equação $5^x = 20$.

Tomando os logaritmos, vem:

$$x \log 5 = \log 20 = \log (5 \times 4) = \log 5 + \log 4$$

Logo

$$x = \frac{\log 5 + \log 4}{\log 5} = 1 + \frac{\log 4}{\log 5} = 1 + \frac{0.60206}{0.69897} = 1.86135$$

Portanto

$$\text{Resp. } x = 1.86135$$

A geometria elementar.

EXERCÍCIOS SOBRE OS LOGARITMOS

Achar por meio das tabelas, os logaritmos dos números seguintes

1855. 046	1885. 0.00018585	2011. 29
1856. 8460	1886. 2.83808	2012. 8.
1857. 8450	1887. 2.83808	
1858. 8440	1888. 0.17045	2012. 8.
1859. 8430	1889. 0.17045	
1860. 2458 72	1890. 0.00816275	2013. 60
1861. 783	1891. 2.107583	
1862. 0470	1892. 1.000000	2014. 4.
1863. 62,78420	1893. 0.000000	2015. 6. 4.
1864. 4447,25	1894. 0.000000	2016. 4. 4.
1865. 8 827	1895. 0.000000	2017. 2. 7
1866. 2580 36	1896. 0.000000	2018. 4. 1
1867. 403855	1897. 4,78621	2019. 2. 4
1868. 2247 74	1898. 0.0045272	2020. 2
1869. 4705	1899. 0.000000880	2021. 2
1870. 4 434	1900. 0.000000	2022. 2
1871. 4 434	1901. 0.000000	2023. 4
1872. 4 434	1902. 0.000000	2024. 4
1873. 4 434	1903. 0.000000	2025. 4 1780
1874. 4 434	1904. 0.000000	2026. 4
1875. 4 434	1905. 4 434	2027. 520 80
1876. 4 434	1906. 4 434	2028. 125,120
1877. 4 434	1907. 4 434	2029. 0.125/0.250
1878. 4 434	1908. 4 434	
1879. 0 2 4	1909. 4 434	2030. 4
1880. 0 2 4	1910. 4 434	
1881. 0 2 4	1911. 4 434	2031. 4 434
1882. 0 2 4	1912. 4 434	2032. 4 434
1883. 0 2 4	1913. 4 434	
1884. 0 2 4	1914. 4 434	

Por meios das duas tabelas a seguir, a seguir, os logaritmos das frações seguintes

2033. 0.434	2042. 0.4549	2051. 4.57/86320
2034. 0.434	2043. 0.4549	2052. 5.34/78460
2035. 0.434	2044. 0.0073482	2053. 0.0743872000
2036. 0.434	2045. 0.000540072	2054. 1.000000
2037. 0.434	2046. 1.17	2055. 1.000000
2038. 0.0043211	2047. 1.19	2056. 1.000000
2039. 0.000056472	2048. 84/55	2057. 0.0000000000
2040. 0.000000000	2049. 75,89	2058. 4 1 3 8
2041. 0,287	2050. 227/735	

Achar os números correspondentes aos logaritmos seguintes

2059. 4 1 3 8	2073. 0.549 0652	2087. 0.497 150
2060. 4 1 3 8	2074. 0.549 134	2088. 6 535 0107
2061. 4 1 3 8	2075. 4 1 3 8	2089. 0 534 8385
2062. 4 1 3 8	2076. 2.007 1 3	2090. 4.895 7208
2063. 4 1 3 8	2077. 1.892 4	2091. 1 3 5682
2064. 4 1 3 8	2078. 4 1 3 8	2092. 5 44 8785
2065. 4 1 3 8	2079. 4 1 3 8	2093. 3.020 64
2066. 4 1 3 8	2080. 0.345	2094. 0 72 3448
2067. 4 1 3 8	2081. 0.602 4	2095. 4.86 4591
2068. 4 1 3 8	2082. 0.042	2096. 2 56 3491
2069. 4 1 3 8	2083. 0.434	2097. 0 84 819
2070. 4 1 3 8	2084. 0.000	2098. 7 34
2071. 4 1 3 8	2085. 0.010	2099. 7 34
2072. 4 1 3 8	2086. 0.014	2100. 3.26

Achar a fração decimal correspondente a cada um dos logaritmos seguintes

2101. 0.534 7670	2116. 2 720 4461	2131. -0.785 217
2102. 0.534 8698	2117. 4 200 3579	2132. -1,98 0056
2103. 1.534 8167	2118. 8.689 6061	2133. -4 24 6056
2104. -0.014 3508	2119. 2 480 5108	2134. 1 764 3177
2105. 4 1 3 8	2120. 4 240 707	2135. 8.568 4597
2106. 4 1 3 8	2121. 0 814 2590	2136. 7,965 8817
2107. 3.724 9010	2122. 4 185 7404	2137. -3,452 1144
2108. 0.534 8660	2123. 8 889 7208	2138. -0.777 1275
2109. 1.306 7818	2124. 7,984 5071	2139. -2 887 6026
2110. 1,783 1502	2125. 7,367 0105	2140. 11 901 0304
2111. 2,814 0789	2126. 7,465 5575	2141. 7 477 1818
2112. 1 985 7407	2127. 5,784 0102	2142. 2 502 0600
2113. 4,185 7404	2128. -1 132 6501	2143. 1,492 6000
2114. 4 236 2 0	2129. -2 579 7218	2144. 4 252 6016
2115. 4,234 7793	2130. -2 354 6004	2145. 3,438 2737

Por meio dos logaritmos, efetuar as operações seguintes e dar o logaritmo final

2146. 6,534 > 9 547	2161. 5489 X 24750
2147. 5489 X 7 800 > 7 803	2162. 724 X 5,17
2148. 7 400 X 7 15	2163. 0,347 X 0,0576 X 0,049
2149. 41685 X 0,004	2164. 0 49 X 1,567 X 27,095
2150. 4627	2165. 0 55 X 0,0948
2151. 7968 X 9847	2166. 0 5 8 X 0 7856
2152. 6348	2167. 0,378

2156. $0,923$ ($0,038 \times 0,584$,	2181. $\sqrt{0,55679}$
2157. "	2182. "
2158. "	2183. "
2159. "	2184. "
2160. "	2185. "
2161. "	2186. "
2162. "	2187. "
2163. "	2188. "
2164. "	2189. "
2165. "	2190. "
2166. "	2191. "
2167. "	2192. "
2168. $10,207^{\circ}$	2193. "
2169. $(41,50)^{\circ}$	2194. $\sqrt{3 \times 3^2 + 1^2}$
2170. $(0,056)^{\circ}$	2195. $\frac{27}{4}$
2171. $(87,69)^{\circ}$	2196. "
2172. $\sqrt{0,607}$	2197. "
2173. $\sqrt{4,85}$	2198. $2,9,0^{\circ}$
2174. "	2199. $\sqrt{2,9919}$
2175. $(8,12)^{\circ}$	2200. $\sqrt{1,0001}$
2176. $(6,70)^{\circ}$	2201. "
2177. $\sqrt{0,341}$	2202. "
2178. "	
2179. $1,3478 \times 0,26748$	
2180. $5,0428 - 11,28410$	

Calcular as expressões seguintes:

2203. $\sqrt{1,1}$	2208. $\sqrt{1,1}$	2213. $\sqrt{1,1}$
2204. $\sqrt{1,1}$	2209. $\sqrt{1,1}$	2214. $\sqrt{1,1}$
2205. $\sqrt{1,1}$	2210. $\sqrt{1,1}$	2215. $\sqrt{1,1}$
2206. $\sqrt{1,1}$	2211. $\sqrt{1,1}$	2216. $\sqrt{1,1}$
2207. $\sqrt{1,1}$	2212. $\sqrt{1,1}$	2217. $\sqrt{1,1}$

2218. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$	2225. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$
2219. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$	2226. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$
2220. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$	2227. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$
2221. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$	2228. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$
2222. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$	2229. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$
2223. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$	2230. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$
2224. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$	2231. $\log x - 2 \log y = \log 2 - \log 7$

PROBLEMAS

2230. Achar o número dos termos da progressão aritmética.
2231. Achar o número dos termos da progressão aritmética: $-4030, -2040, -101, 87$.
2232. Achar o número dos termos e a razão de uma progressão aritmética se o primeiro termo é 4, o último é 9, e o número dos termos é 25.
2233. Achar a razão de uma progressão geométrica se o primeiro termo é $\frac{1}{2187}$, o último 729, e o número dos termos 14.
2234. A população de um país aumenta cada ano de $\frac{1}{100}$. Daí a quantos anos será triplicada?

2235. A população de um país aumenta cada ano de $\frac{1}{100}$. Daí a quantos anos será triplicada?
2236. Inserir 10 meios proporcionais entre 10 e 20.
2237. Calcular a superfície de um triângulo cujos lados são 30, 36 e 40 metros.
2238. Dada a progressão aritmética: $6, 12, 18, 24, \dots$ achar o número dos termos.
2239. De uma barrica de 100 litros de vinho tirou-se 1 litro 2 vezes e cada vez foi substituído por 1 litro de água. Depois disso, quantos litros de vinho puro na barrica?

CAPÍTULO V

JUROS COMPOSTOS E ANUIDADES

1. JUROS COMPOSTOS

305. Definição. — Diz-se que um juro é composto quando o juro de cada período se junta ao capital e produz novos juros.

Assim, os juros se capitalizam e produzem novos juros.

Para os juros compostos é o mesmo procedimento por 100% anualmente. Designando por r a taxa, e C o capital, temos:

1.º Para a taxa dos juros compostos r , temos:

2.º Para o número de anos n , temos:

3.º Para o valor do juro J , temos:

Assim, para saber quanto vale, depois de n anos, o capital C , temos:

O capital C $(1+r)^n$ valerá pois, J $(1+r)^n$ depois de n anos.

Essa capital valerá por sua parte, depois de um ano isto é, no fim do terceiro ano

Assim, por diante

Designando por C o capital definido depois de n anos, é evidente que temos:

$$C = C_1 (1+r)^n$$

Madriçola a fórmula e os juros se capitalizam todos os 6 meses, e a taxa de um ano for 10% 6 meses será 100 $\frac{r}{2}$, e o número de capitalizações será 2.

Igualmente o juro de 1% por 6 meses será $\frac{r}{2}$

Na fórmula vem a ser,

$$C = C_1 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^n$$

308. Aplicações da fórmula (1) — a fórmula

$$C = C_1 (1+r)^n$$

para a taxa r e o tempo n , e C e C_1 podem ser calculados.

$$C = C_1 (1+r)^n \quad (1)$$

$$C = C_1 (1+r)^n \quad (2)$$

Assim, os logaritmos,

$$\log C = \log C_1 + n \log (1+r) \quad (3)$$

$$\log C = \log C_1 + n \log (1+r) \quad (4)$$

$$t = \frac{\log C - \log C_1}{\log (1+r)} \quad (5)$$

$$\log (1+r) = \frac{\log C - \log C_1}{t} \quad (6)$$

Assim, aplicaremos as fórmulas (1) e (2) calculando-se as

1,03; 1,04; 1,05; 1,06; 1,07; 1,08

Assim, na coluna 5%, temos:

1,05 = 1,0500000
1,05² = 1,1025000
1,05³ = 1,1576250
1,05⁴ = 1,2165063, etc.

1. James Earl Ray was the man who shot Dr. Martin Luther King.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50

Aplicação do juro composto durante 20 anos a 4

1877 1878 1879 1880 1881 1882 1883 1884 1885 1886 1887 1888 1889 1890 1891 1892 1893 1894 1895 1896 1897 1898 1899 1900 1901 1902 1903 1904 1905 1906 1907 1908 1909 1910 1911 1912 1913 1914 1915 1916 1917 1918 1919 1920 1921 1922 1923 1924 1925 1926 1927 1928 1929 1930 1931 1932 1933 1934 1935 1936 1937 1938 1939 1940 1941 1942 1943 1944 1945 1946 1947 1948 1949 1950 1951 1952 1953 1954 1955 1956 1957 1958 1959 1960 1961 1962 1963 1964 1965 1966 1967 1968 1969 1970 1971 1972 1973 1974 1975 1976 1977 1978 1979 1980 1981 1982 1983 1984 1985 1986 1987 1988 1989 1990 1991 1992 1993 1994 1995 1996 1997 1998 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024 2025 2026 2027 2028 2029 2030 2031 2032 2033 2034 2035 2036 2037 2038 2039 2040 2041 2042 2043 2044 2045 2046 2047 2048 2049 2050 2051 2052 2053 2054 2055 2056 2057 2058 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 2067 2068 2069 2070 2071 2072 2073 2074 2075 2076 2077 2078 2079 2080 2081 2082 2083 2084 2085 2086 2087 2088 2089 2090 2091 2092 2093 2094 2095 2096 2097 2098 2099 2100 2101 2102 2103 2104 2105 2106 2107 2108 2109 2110 2111 2112 2113 2114 2115 2116 2117 2118 2119 2120 2121 2122 2123 2124 2125 2126 2127 2128 2129 2130 2131 2132 2133 2134 2135 2136 2137 2138 2139 2140 2141 2142 2143 2144 2145 2146 2147 2148 2149 2150 2151 2152 2153 2154 2155 2156 2157 2158 2159 2160 2161 2162 2163 2164 2165 2166 2167 2168 2169 2170 2171 2172 2173 2174 2175 2176 2177 2178 2179 2180 2181 2182 2183 2184 2185 2186 2187 2188 2189 2190 2191 2192 2193 2194 2195 2196 2197 2198 2199 2200 2201 2202 2203 2204 2205 2206 2207 2208 2209 2210 2211 2212 2213 2214 2215 2216 2217 2218 2219 2220 2221 2222 2223 2224 2225 2226 2227 2228 2229 2230 2231 2232 2233 2234 2235 2236 2237 2238 2239 2240 2241 2242 2243 2244 2245 2246 2247 2248 2249 2250 2251 2252 2253 2254 2255 2256 2257 2258 2259 2260 2261 2262 2263 2264 2265 2266 2267 2268 2269 2270 2271 2272 2273 2274 2275 2276 2277 2278 2279 2280 2281 2282 2283 2284 2285 2286 2287 2288 2289 2290 2291 2292 2293 2294 2295 2296 2297 2298 2299 2300 2301 2302 2303 2304 2305 2306 2307 2308 2309 2310 2311 2312 2313 2314 2315 2316 2317 2318 2319 2320 2321 2322 2323 2324 2325 2326 2327 2328 2329 2330 2331 2332 2333 2334 2335 2336 2337 2338 2339 2340 2341 2342 2343 2344 2345 2346 2347 2348 2349 2350 2351 2352 2353 2354 2355 2356 2357 2358 2359 2360 2361 2362 2363 2364 2365 2366 2367 2368 2369 2370 2371 2372 2373 2374 2375 2376 2377 2378 2379 2380 2381 2382 2383 2384 2385 2386 2387 2388 2389 2390 2391 2392 2393 2394 2395 2396 2397 2398 2399 2400 2401 2402 2403 2404 2405 2406 2407 2408 2409 2410 2411 2412 2413 2414 2415 2416 2417 2418 2419 2420 2421 2422 2423 2424 2425 2426 2427 2428 2429 2430 2431 2432 2433 2434 2435 2436 2437 2438 2439 2440 2441 2442 2443 2444 2445 2446 2447 2448 2449 2450 2451 2452 2453 2454 2455 2456 2457 2458 2459 2460 2461 2462 2463 2464 2465 2466 2467 2468 2469 2470 2471 2472 2473 2474 2475 2476 2477 2478 2479 2480 2481 2482 2483 2484 2485 2486 2487 2488 2489 2490 2491 2492 2493 2494 2495 2496 2497 2498 2499 2500 2501 2502 2503 2504 2505 2506 2507 2508 2509 2510 2511 2512 2513 2514 2515 2516 2517 2518 2519 2520 2521 2522 2523 2524 2525 2526 2527 2528 2529 2530 2531 2532 2533 2534 2535 2536 2537 2538 2539 2540 2541 2542 2543 2544 2545 2546 2547 2548 2549 2550 2551 2552 2553 2554 2555 2556 2557 2558 2559 2560 2561 2562 2563 2564 2565 2566 2567 2568 2569 2570 2571 2572 2573 2574 2575 2576 2577 2578 2579 2580 2581 2582 2583 2584 2585 2586 2587 2588 2589 2590 2591 2592 2593 2594 2595 2596 2597 2598 2599 2600 2601 2602 2603 2604 2605 2606 2607 2608 2609 2610 2611 2612 2613 2614 2615 2616 2617 2618 2619 2620 2621 2622 2623 2624 2625 2626 2627 2628 2629 2630 2631 2632 2633 2634 2635 2636 2637 2638 2639 2640 2641 2642 2643 2644 2645 2646 2647 2648 2649 2650 2651 2652 2653 2654 2655 2656 2657 2658 2659 2660 2661 2662 2663 2664 2665 2666 2667 2668 2669 2670 2671 2672 2673 2674 2675 2676 2677 2678 2679 2680 2681 2682 2683 2684 2685 2686 2687 2688 2689 2690 2691 2692 2693 2694 2695

 $\Delta_{\text{sub}} = 10,000 (1.04)^{10}$

2. *g* is odd or *g* is even

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040 1

Q 10148 1 1 21 0114231

THE UNIVERSITY OF CHICAGO LIBRARY

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

3 3 10 1 1 3 11

Ch. 10 (1010)

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{1}{2} x^2$

gunde $\log A = 1.340\ 6068$

e pertanto $A = 21.911.4830$

Se um capital, a juros compostos, durante 15 anos, a 5 %, veio a ser 20.000\$, qual é este capital?

PRIMEIRO METODO. — A formula 2) dá

20 000

 $\alpha = 1.0515$

... quadr A forte e

 $1.0513 = {}^{176}\text{Wt } \text{H}_2\text{O}_2$

100de

20 000

$$= \frac{20.600}{1,1} = 18.727,27$$

100% Voted Yes

24. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ and $g(x) = x^2 - 4x + 3$

As tabelas de logaritmos de

 $\log 20\,000 = 4.301\,0300$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

[Illegible] [Illegible] [Illegible]

REPORTING NO. 9 620 5350

Qual é este tempo?

Qual é este tempo?

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (1) dá,

$$1,045^x = \frac{21.000}{12.000} \quad \frac{25}{12} = 2,0833333.$$

Consultando o quadro (A), vê-se na coluna 4,5 % q 2,0833333 está compreendido entre 2,0223701 e 2,1133768 portanto, x está compreendido entre 16 anos e 17 anos.

O grupo próximo é, pois, 16 anos mais uma fração x que se deve calcular como se segue:

Quando 2,0223701 aumenta da diferença tabular que é 2,1133768 — 2,0223701 = 0,0910067 dermos milionesimos, o número correspondente de anos aumenta de 305 dias, ou seja 0,84170 = 0,00223701.

2,0833333 — 2,0223701 = 0,0609632 de milionesimos o número de anos, 16 aumentará de x dias, proporcionalmente.

A idade aproximadamente:

$$\frac{x}{0,0609632} = \frac{0,00223701}{0,000001}$$

De onde se tira:

$$x = 244 \text{ dias, ou 8 meses e 4 dias.}$$

Resp. 16 anos 8 meses 4 dias

SEGUNDO METODO. — A fórmula (5) fornece escorva

$$x = \frac{\log 25 - \log 12}{\log 1,045}$$

As taboas de logarithmos dão:

$$\log 25 = 1,3979400$$

$$-\log 12 = 2,9208187$$

$$\text{Logo } \log 25 - \log 12 = 0,3187587$$

Mas temos:

$$\log 1,045 = 0,0191163$$

Temos pois

$$\frac{0,3187587}{0,0191163} = 16 \text{ anos 8 meses 5 dias.}$$

6º A que taxa foi emprestada uma quantia de \$450 que se tornou \$753, a juros compostos, durante 12 anos?

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (1) dá

$$1 + r = \sqrt[12]{\frac{753}{450}}$$

Entrando no quadro (A), entre as 12^{as} potências de $1 + r$, há-se que 1,798579 está na coluna de 5 %.

SEGUNDO METODO. — A fórmula (5) fornece escorva

$$\log (1 + r) = \frac{\log 753 - \log 450}{12}$$

As taboas de logarithmos dão:

$$\log 753 = 4,1811287$$

$$-\log 450 = 4,073443$$

$$\text{Logo } \log (1 + r) = 0,2542787$$

$$\text{Portanto } \log (1 + r) = \frac{0,2542787}{12} = 0,0211898$$

Passando aos números correspondentes, temos:

$$1 + r = 1,05.$$

$$r = 5\%.$$

A taxa 100r é, pois, 5 %.

5º Quanto tempo leva uma quantia a juros compostos, para se tornar p vezes maior se o juro anual de 4 % é r ?

Temos: $(1 + r)^x = p$

Pela que $C = pc$, temos também

$$p = 1 + r^x$$

quando os logarithmos, vem:

$$\log p = x \log (1 + r)$$

donde

$$x = \frac{\log p}{\log (1 + r)}$$

6º Como aplicação, seja achar que tempo leva um capital para se duplicar, a 5 %

$$\text{Temos } p = 2 \quad r = 0,05$$

Portanto:

$$x = \frac{\log 2}{\log 1,05} = \frac{0,3010300}{0,0211898} = 14 \text{ anos 2 meses 16 dias.}$$

II. Constituição de um capital.

308. Definição. — Anuidade é uma quantia fixa, paga todos os anos com o fim de constituir um capital ou amortizar uma dívida.

310. Problema geral. — Uma pessoa põe a juros compostos, no começo de cada ano, uma quantia fixa c . Qual será o capital constituído depois de t anos, se o juro anual de 1% é r ?

A x = capital constituído depois de t anos.

A 2.ª anuidade vence juros durante $t-1$ anos. Depois dos $t-1$ anos x_1 =

A 3.ª anuidade vence juros durante $t-2$ anos. Depois dos $t-2$ anos x_2 =

A 1.ª anuidade vence juros durante t anos. Depois dos t anos x_t =

A soma dos capitais x_1, x_2, \dots, x_t é o capital constituído depois de t anos.

A soma dos juros y_1, y_2, \dots, y_t é o juro total recebido depois de t anos.

A soma dos juros y_1, y_2, \dots, y_t é o juro total recebido depois de t anos.

A soma dos juros y_1, y_2, \dots, y_t é o juro total recebido depois de t anos.

A soma dos juros y_1, y_2, \dots, y_t é o juro total recebido depois de t anos.

A soma dos juros y_1, y_2, \dots, y_t é o juro total recebido depois de t anos.

A soma dos juros y_1, y_2, \dots, y_t é o juro total recebido depois de t anos.

B Tabela indicando o capital adquirido no fim de cada ano por um pagamento anual de 1\$

| | 1 0,0 | 4,50 10 | 5 0,0 | 8 0,0 |
|----|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 2 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 3 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 4 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 5 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 6 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 7 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 8 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 9 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 10 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 11 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 12 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 13 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 14 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 15 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 16 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 17 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 18 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 19 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 20 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 21 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 22 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 23 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 24 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 25 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 26 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 27 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 28 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 29 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 30 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 31 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 32 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 33 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 34 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 35 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 36 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 37 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 38 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 39 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 40 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 41 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 42 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 43 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 44 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 45 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 46 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 47 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 48 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 49 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |
| 50 | 1000000 | 4500000 | 5000000 | 8000000 |

Assim na coluna 4 p. 100, temos:

$$S_1 = 1,0400000 = (1,04)^1$$

$$S_2 = 1,0816000 = (1,04)^2$$

$$S_3 = 1,1248640 = (1,04)^3$$

$$S_4 = 1,1698560 = (1,04)^4$$

$$S_5 = 1,2166502 = (1,04)^5$$

Aplicações. — Um pai quer constituir um dote a cada um de seus 4 filhos, com uma anuidade de 4.320\$ posta a 5% a juros compostos. Quanto receberá cada filho, no fim de 15 anos?

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (1) d

$$C = cS_n \div S_n$$

Na tabela (B) acha-se na coluna 5%.

$$S_{15} = 22,6574918$$

Onde resulta: $C = 4320 \div 22,6574918 = 190,680300$

O dote de cada filho será 24.470\$110

SEGUNDO METODO. — A fórmula (2) de

$$C = \frac{4320}{0,05} (1,05^{15} - 1,05)$$

A tabela (A), dá: $1,05^{15} = 2,0828740$

Portanto: $C = \frac{4320}{0,05} (2,0828740 - 1,05) = 27.880$300$

$$\text{Cada filho receberá } \frac{27.880,300}{4} = 6.970,075$$

TERCEIRO METODO. — Pode-se calcular $1,05^{15}$ por

$$\log 1,05^{15} = 15 \log 1,05 = 15 \times 0,0211893 = 0,3178395$$

Do que $1,05^{15} = 2,0828740$

$$\text{Temos então } C = \frac{4320}{0,05} (2,0828740 - 1,05) = 27.880$300$$

2.º Que quantia é preciso pagar anualmente, á taxa 4 para se obterem 45.000\$ no fim de 10 anos?

PRIMEIRO METODO — A fórmula (1) dá

$$45.000 = cS_{10}$$

Na tabela (B), acha-se na coluna 4%:

$$S_{10} = 12,4863514$$

Portanto: $45.000 = c \times 12,4863514$

$$\text{Donde se tira: } c = \frac{45.000}{12,4863514} = 3.603$930$$

SEGUNDO METODO. — A fórmula (2) dá

$$1 + r$$

Na tabela (A), na coluna 4%, acha-se

$$1,04^{10} = 1,480244$$

$$\text{e então } c = \frac{45.000}{1,480244} = 3.039$930$$

TERCEIRO METODO. — Na fórmula

$$c = \frac{45.000 \times 0,04}{1,480244 - 1,04}$$

pode-se calcular $1,04^{10}$ por logaritmos, as taboas dão:

$$10 \log 1,04 = 0,1873017$$

O número correspondente é 1,480244

$$\text{Temos pois: } c = \frac{45.000 \times 0,04}{1,480244 - 1,04} = 3.039$930$$

3.º Uma pessoa põe anualmente 2.000\$ a 4,5%, os juros compostos. Depois de quantos anos receberá 65.500\$250?

PRIMEIRO METODO. — Temos pela fórmula (1)

$$65.500,250 = 2.000 S_n$$

Na tabela (B) na coluna 4,5 p. 100, acha-se que 32,783125 corresponde a 20 anos.

SEGUNDO METODO. — A fórmula (2) dá

$$(1 + r)^n = 1 + rS_n$$

$$\text{ou } 1 + 4,5\% = 1 + \frac{2.000 \times 0,045}{65.500,250} = 1,041135$$

As tabelas A e B dão

$$S_{21} = 37.505,2144 \\ 1,05^{21} = 2,925807$$

Portanto :

$$C = \frac{1.555,37.505,2144 + 1}{2,925807} = 20.600\$$$

SEXTA SOLUÇÃO — Pela fórmula geral

$$S_{21} = 37.505,2144$$

$$1,05^{21} = 2,925807$$

Portanto :

$$C = \frac{1.555,37.505,2144 + 1}{2,925807} = 20.600\$$$

Observação. — Pode-se calcular a quantidade 1,05 por meio dos logaritmos.

2.º Emprestaram-se 20.600\$, e os juros compostos q se devem pagar por n unidades. Qual será em n unidades

PRIMEIRO METODO — A fórmula geral da

$$C = \frac{20.600 (0,05 + 1.04^n)}{1,04^n - 1}$$

Por meio da tabela A, ou da tabela de logaritmos, temos

$$1,04^n = 1,531451$$

Porto resulta :

$$C = \frac{2000 + 1.5304541}{0,5304541} = 5.707,453$$

SEGUNDO METODO — A fórmula geral

$$C = \frac{1}{(1 - r)^n}$$

$$(1 - r)^n$$

permite escrever

$$\frac{1 + r^n}{1 - r} = 50.000(1,04^n)$$

As tabelas B e A dão

$$\frac{1 + r^n}{1 - r} = 50.000(1,04^n)$$

Do

$$C = \frac{50.000 + 1,5304541}{0,5304541} = 5.707,453$$

... a po é necessaria para se pagar uma quantia
2000 emprestada a 5 %, e os juros compostos pagados se
\$ todos os anos?

Da fórmula geral

d) luz :

$$1 + r^n = 1,05$$

logaritmos :

$$1 \log (1)$$

Donde

$$1 = \frac{0,05 + 1,04^n}{1,04^n - 1} \log 1,05$$

As tabelas de logaritmos dão

1.4111

$$1 = \frac{0,4863519}{0,0211803} = \text{anos 11 meses 13 dias}$$

4.º A que taxa é preciso pagar anualmente 25.000\$ para se
pagar uma dívida de 201.000\$ em 15 anos?

A fórmula (1) dá (nº 342) :

$$1 + r^n = \frac{C}{1 - r^n} = \frac{201.000}{25.000} = 11,652 \text{ 2020}$$

Experimentando-se a taxa 8 % (resposta

$$1 + r^n = 1$$

$$r^n + r^n$$

é um valor superior a 11,652 2020

Experimentando-se 7,5 % (resposta

$$1,04^{15} = 1$$

$$0,04^{15} = 1$$

Portanto : 7,5 %

2268. Que soma seria por a se amortizar uma dívida de 100\$ a 5% a juros simples em 1 ano se 950\$ todos os anos?

2269. Uma cidade recebe de empréstimo 185000\$ que deve amortizar em 12 pagamentos anuais (juros 1% começa um ano depois de emprestar a quantia). Se a taxa dos juros compõe 1,5%

2270. Puseram-se 100\$ a juros compostos a 6% ao ano e depois de todos os anos se puseram mais uma unidade que existia de 200\$ a 6% ao ano. Qual será o capital final?

2271. Um povo em 1914 tinha 100 mil habitantes e em 1920 tinha 150 mil habitantes.

2272. Uma cidade tomou de empréstimo a 5% juros compostos a 5%, que deve amortizar com 12 pagamentos anuais (juros 1% começa um ano depois de emprestar a quantia).

2273. Comprou-se uma casa por 200000\$ pagável à vista. Modificando as condições e fazendo três pagamentos anuais iguais começa o 1º no fim do primeiro ano. Os juros são compostos e à taxa de 5%. Qual é a soma da quantia?

CAPÍTULO VI

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS DE RECAPITULAÇÃO

I. Cálculo algébrico.

Reduzir os termos semelhantes:

$$2274. 450 - 12a^2 - 83 - 52a^2 + 67. \text{ I.e. } 367 - 64a^2$$

$$2275. 19a^2 - \frac{3b^2}{6} + a^2 - 5b^2 + \frac{5a^2}{6} - \frac{4a^2}{7} - \frac{8b^2}{9} - 3a^2$$

Calcular as expressões seguintes, para $x = 2$ e $y = 3$:

$$2276. a^2x^2 - 3a^2x^2 + 3ax - 1$$

$$2277. \frac{2a^2}{a^2} + \frac{4a^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2}$$

Dados os polinômios

$$A = x^2 + 2ab - b^2 \quad C = x^2 + 2ab - b^2$$

$$B = a^2 - 2ab + b^2 \quad D = 2ab - 2a^2 - b^2$$

Calcular as expressões seguintes:

$$2278. \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad 2280. \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$$

$$2279. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad 2281. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$$

Efetuar e reduzir

$$2282. a^2(-a^2)(-a^2)(-a^2)(-a^2)$$

$$2283. x^2(-x^2)(-x^2)(-x^2)(-x^2)$$

$$2284. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$$

$$2285. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$$

$$2286. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$$

$$2287. \frac{-2a^2x^2}{9} + \frac{3ax^2y^2}{21} - 5a^2x^2y^2 + 4$$

Descompôr em factores:

$$2288. 1 - x^2 - y^2 - z^2 - w^2 - 50xz^2 \quad 2290. 4x^2 + 2yz - 1$$

$$2289. 5x^2 - (5a^2x)^2 + (5a^2x)^2 - (5a^2x)^2 \quad 2291. (x^2 + y^2)^2 - 1$$

Efetuar as operações indicadas

$$2292. x^2 - y^2 - x^2y^2 + (x^2 - y^2) - x^2y^2$$

$$2293. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{2xy}{3} - \frac{1}{x}$$

$$2294. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{2xy}{3} - \frac{1}{x}$$

$$2295. \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2$$

$$2296. (a - 7b)^2$$

$$2297. (a - 7b)^2$$

$$2298. (a - 7b)^2$$

$$2299. (a - 7b)^2$$

$$2300. (a - 7b)^2$$

$$2301. (a - 7b)^2$$

$$2302. (a - 7b)^2$$

$$2303. (a - 7b)^2$$

$$2304. (a - 7b)^2$$

$$2305. (a - 7b)^2$$

$$2306. (a - 7b)^2$$

$$2307. (a - 7b)^2$$

$$2308. (a - 7b)^2$$

$$2309. (a - 7b)^2$$

$$2310. (a - 7b)^2$$

$$2311. (a - 7b)^2$$

$$2312. (a - 7b)^2$$

$$2313. (a - 7b)^2$$

$$2314. (a - 7b)^2$$

$$2315. (a - 7b)^2$$

$$2316. (a - 7b)^2$$

$$2317. (a - 7b)^2$$

$$2318. (a - 7b)^2$$

$$2319. (a - 7b)^2$$

$$2320. (a - 7b)^2$$

$$2321. (a - 7b)^2$$

$$2322. (a - 7b)^2$$

$$2323. (a - 7b)^2$$

$$2324. (a - 7b)^2$$

$$2325. (a - 7b)^2$$

$$2326. (a - 7b)^2$$

$$2327. (a - 7b)^2$$

$$2328. (a - 7b)^2$$

$$2329. (a - 7b)^2$$

$$2330. (a - 7b)^2$$

$$2331. (a - 7b)^2$$

$$2332. (a - 7b)^2$$

$$2333. (a - 7b)^2$$

$$2334. (a - 7b)^2$$

$$2335. (a - 7b)^2$$

$$2336. (a - 7b)^2$$

$$2337. (a - 7b)^2$$

$$2338. (a - 7b)^2$$

$$2339. (a - 7b)^2$$

$$2340. (a - 7b)^2$$

$$2341. (a - 7b)^2$$

$$2342. (a - 7b)^2$$

$$2343. (a - 7b)^2$$

$$2344. (a - 7b)^2$$

$$2345. (a - 7b)^2$$

$$2346. (a - 7b)^2$$

$$2347. (a - 7b)^2$$

$$2348. (a - 7b)^2$$

$$2349. (a - 7b)^2$$

$$2350. (a - 7b)^2$$

$$2351. (a - 7b)^2$$

$$2352. (a - 7b)^2$$

$$2353. (a - 7b)^2$$

$$2354. (a - 7b)^2$$

$$2355. (a - 7b)^2$$

$$2356. (a - 7b)^2$$

$$2357. (a - 7b)^2$$

$$2358. (a - 7b)^2$$

$$2359. (a - 7b)^2$$

$$2360. (a - 7b)^2$$

$$2361. (a - 7b)^2$$

$$2362. (a - 7b)^2$$

$$2363. (a - 7b)^2$$

$$2364. (a - 7b)^2$$

$$2365. (a - 7b)^2$$

$$2366. (a - 7b)^2$$

$$2367. (a - 7b)^2$$

$$2368. (a - 7b)^2$$

$$2369. (a - 7b)^2$$

$$2370. (a - 7b)^2$$

$$2371. (a - 7b)^2$$

$$2372. (a - 7b)^2$$

$$2373. (a - 7b)^2$$

$$2374. (a - 7b)^2$$

$$2375. (a - 7b)^2$$

$$2376. (a - 7b)^2$$

$$2377. (a - 7b)^2$$

$$2378. (a - 7b)^2$$

$$2379. (a - 7b)^2$$

$$2380. (a - 7b)^2$$

$$2381. (a - 7b)^2$$

$$2382. (a - 7b)^2$$

$$2383. (a - 7b)^2$$

$$2384. (a - 7b)^2$$

$$2385. (a - 7b)^2$$

$$2386. (a - 7b)^2$$

$$2387. (a - 7b)^2$$

$$2388. (a - 7b)^2$$

$$2389. (a - 7b)^2$$

$$2390. (a - 7b)^2$$

$$2391. (a - 7b)^2$$

$$2392. (a - 7b)^2$$

$$2393. (a - 7b)^2$$

$$2394. (a - 7b)^2$$

$$2395. (a - 7b)^2$$

$$2396. (a - 7b)^2$$

$$2397. (a - 7b)^2$$

$$2398. (a - 7b)^2$$

$$2399. (a - 7b)^2$$

$$2400. (a - 7b)^2$$

$$2401. (a - 7b)^2$$

$$2402. (a - 7b)^2$$

$$2403. (a - 7b)^2$$

$$2404. (a - 7b)^2$$

$$2405. (a - 7b)^2$$

$$2406. (a - 7b)^2$$

$$2407. (a - 7b)^2$$

$$2408. (a - 7b)^2$$

$$2409. (a - 7b)^2$$

$$2410. (a - 7b)^2$$

$$2411. (a - 7b)^2$$

$$2412. (a - 7b)^2$$

$$2413. (a - 7b)^2$$

$$2414. (a - 7b)^2$$

$$2415. (a - 7b)^2$$

$$2416. (a - 7b)^2$$

$$2417. (a - 7b)^2$$

$$2418. (a - 7b)^2$$

$$2419. (a - 7b)^2$$

$$2420. (a - 7b)^2$$

$$2421. (a - 7b)^2$$

$$2422. (a - 7b)^2$$

$$2423. (a - 7b)^2$$

$$2424. (a - 7b)^2$$

$$2425. (a - 7b)^2$$

$$2426. (a - 7b)^2$$

$$2427. (a - 7b)^2$$

$$2428. (a - 7b)^2$$

$$2429. (a - 7b)^2$$

$$2430. (a - 7b)^2$$

$$2431. (a - 7b)^2$$

$$2432. (a - 7b)^2$$

$$2433. (a - 7b)^2$$

$$2434. (a - 7b)^2$$

$$2435. (a - 7b)^2$$

$$2436. (a - 7b)^2$$

$$2437. (a - 7b)^2$$

$$2438. (a - 7b)^2$$

$$2439. (a - 7b)^2$$

$$2440. (a - 7b)^2$$

$$2441. (a - 7b)^2$$

$$2442. (a - 7b)^2$$

$$2443. (a - 7b)^2$$

$$2444. (a - 7b)^2$$

$$2445. (a - 7b)^2$$

$$2446. (a - 7b)^2$$

$$2447. (a - 7b)^2$$

$$2448. (a - 7b)^2$$

$$2449. (a - 7b)^2$$

$$2450. (a - 7b)^2$$

$$2451. (a - 7b)^2$$

$$2452. (a - 7b)^2$$

$$2453. (a - 7b)^2$$

$$2454. (a - 7b)^2$$

$$2455. (a - 7b)^2$$

$$2456. (a - 7b)^2$$

$$2457. (a - 7b)^2$$

$$2458. (a - 7b)^2$$

Realizar as operações indicadas:

2326. $27a^3b^2c^4d^5 + 15a^4b^2c^4d^5$

2328. $a^2x^3y^4 - 3a^2x^3y^4$

2327. $a^2b^3c^4d^5 - 3a^2b^3c^4d^5$

Subtrair as expressões:

2328. $a^2b^3c^4d^5 - 3a^2b^3c^4d^5$

2329. $(-50a^2b^3c^4) - [(-100a^2b^3) \times (2a^2b^3c^4)]$

2330. $[(-a^2b^3c^4d^5) \times (a^2b^3c^4d^5)] - [(-a^2b^3c^4d^5) \times (a^2b^3c^4d^5)]$

Realizar as divisões:

2331. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2332. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2333. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2334. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2335. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2336. $(a^2b^3c^4d^5) : (a^2b^3c^4d^5)$

2337. $(a^2b^3c^4d^5) : (a^2b^3c^4d^5)$

2338. $(a^2b^3c^4d^5) : (a^2b^3c^4d^5)$

2339. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2340. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2342. $(a^2b^3c^4d^5) : (a^2b^3c^4d^5)$

2343. $(1 + a^2b^3c^4d^5) : (1 + a^2b^3c^4d^5)$

2344. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2345. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

por $a + b + c$:

2346. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

Calcular os 6 primeiros termos do quociente de cada uma das divisões seguintes:

2347. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2348. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2349. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2350. $(a - b) : (a - 1)$

2351. $(a - b) : (a - 1)$

2352. $(1 + a^2b^3c^4d^5) : (1 + a^2b^3c^4d^5)$

8) Simplificar as frações seguintes:

2353. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2355. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2357. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2354. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2356. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2358. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2355. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2357. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2359. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2356. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2358. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2360. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2357. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2359. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2361. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2358. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2360. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2362. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2359. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2361. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2363. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2360. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2362. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2364. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2361. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2363. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2365. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2362. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2364. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2366. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2363. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2365. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2367. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2364. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2366. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2368. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

Realizar as operações:

2365. $a^2b^3c^4d^5 + 3a^2b^3c^4d^5$

2366. $a^2b^3c^4d^5 - 3a^2b^3c^4d^5$

2367. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2368. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2369. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2370. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2371. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2372. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2373. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2374. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2375. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2376. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2377. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2378. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2379. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2380. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2381. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2382. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2383. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2384. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2385. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2386. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2387. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2388. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2389. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2390. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2391. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2392. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2393. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2394. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2395. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2396. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2397. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2398. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2399. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2400. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2401. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2402. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2403. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2404. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2405. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2406. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2407. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2408. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2409. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2410. $a^2b^3c^4d^5 : a^2b^3c^4d^5$

2371. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2372. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2373. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2374. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2375. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2376. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2377. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2378. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2379. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2380. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2381. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2382. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2383. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2384. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2385. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2386. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2387. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2388. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2389. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2390. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2391. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2392. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2393. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2394. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2395. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2396. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2397. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2398. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2399. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2400. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2401. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2402. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2403. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2404. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2405. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2406. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2407. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2408. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2409. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2410. $\frac{a^2b^3c^4d^5}{a^2b^3c^4d^5}$

2378. A proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ tem por consequência a seguinte:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{c}{d}}$$

2379. Demonstrar que temos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e somente se $a + b = c + d$ e $a - b = c - d$.

2380. Demonstrar que a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$$

2381. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

2382. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

2383. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

2384. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

II Equações do primeiro grau

2382 $x + y = 1$

2383 $x + y = 1$

2384 $x + y = 1$

2385 $x + y = 1$

2386 $x + y = 1$

2387 $x + y = 1$

2388 $x + y = 1$

2389 $x + y = 1$

2390 $3x + 6x = 9$

2391 $x + y = 1$

2392 $x + y = 1$

2393 $x + y = 1$

2394 $x + y = 1$

2395 $x + y = 1$

2396 $x + y = 1$

2397 $x + y = 1$

2398 $x + y = 1$

2399 $x + y = 1$

2400 $x + y = 1$

2401 $x + y = 1$

Donde as raízes inteiras positivas das equações indeterminadas seguintes

2402 $2x + y = 6$

2403 $x + 2y = 6$

2404 $4x + 3y = 6$

2405 $11x + 10y = 20$

2406 $3x + 8y = 6$

2407 $x + y = 1$

2408 $x + y = 1$

2409 $x + y = 1$

Equações de variáveis lineares a resolver

2410 $3x + 1 = 4y + 1$

2411 $y - x + 31 = \frac{2 - x}{y}$

2412 $2(x + 10) = 3(y + 10)$

2413 $x + y = 1$

2414 $x + y = 1$

2415 $x + y = 1$

2416 $x + y = 1$

2417 $x + y = 1$

2418 $x + y = 1$

2419 $x + y = 1$

2410 $x + y = 1$

2411 $x + y = 1$

2412 $x + y = 1$

2413 $x + y = 1$

2414 $x + y = 1$

2415 $x + y = 1$

2416 $x + y = 1$

2417 $x + y = 1$

2418 $x + y = 1$

2419 $x + y = 1$

2417 $x + y = 1$

2418 $x + y = 1$

2419 $x + y = 1$

2420 $x + y = 1$

2421 $x + y = 1$

2422 $x + y = 1$

2423 $x + y = 1$

2424 $x + y = 1$

2425 $x + y = 1$

2426 $x + y = 1$

2427 $x + y = 1$

2428 $x + y = 1$

2429 $x + y = 1$

2430 $x + y = 1$

2431 $x + y = 1$

2432 $x + y = 1$

2433 $x + y = 1$

2434 $x + y = 1$

2435 $x + y = 1$

2436 $x + y = 1$

2437 $x + y = 1$

2438 $x + y = 1$

2439 $x + y = 1$

2440 $x + y = 1$

2441 $x + y = 1$

2442 $x + y = 1$

2443 $x + y = 1$

2444 $x + y = 1$

2445 $x + y = 1$

2446 $x + y = 1$

2447 $x + y = 1$

2448 $x + y = 1$

2449 $x + y = 1$

2450 $x + y = 1$

2451 $x + y = 1$

2452 $x + y = 1$

2453 $x + y = 1$

2454 $x + y = 1$

2455 $x + y = 1$

2456 $x + y = 1$

2457 $x + y = 1$

2458 $x + y = 1$

2459 $x + y = 1$

2460 $x + y = 1$

2420 $x + y = 1$

2421 $x + y = 1$

2422 $x + y = 1$

2423 $x + y = 1$

2424 $x + y = 1$

2425 $x + y = 1$

2426 $x + y = 1$

2427 $x + y = 1$

2428 $x + y = 1$

2429 $x + y = 1$

2430 $x + y = 1$

2431 $x + y = 1$

2432 $x + y = 1$

2433 $x + y = 1$

2434 $x + y = 1$

2435 $x + y = 1$

2436 $x + y = 1$

2437 $x + y = 1$

2438 $x + y = 1$

2439 $x + y = 1$

2440 $x + y = 1$

2441 $x + y = 1$

2442 $x + y = 1$

2443 $x + y = 1$

2444 $x + y = 1$

2445 $x + y = 1$

2446 $x + y = 1$

2447 $x + y = 1$

2448 $x + y = 1$

2449 $x + y = 1$

2450 $x + y = 1$

2451 $x + y = 1$

2452 $x + y = 1$

2453 $x + y = 1$

2454 $x + y = 1$

2455 $x + y = 1$

2456 $x + y = 1$

2457 $x + y = 1$

2458 $x + y = 1$

2459 $x + y = 1$

2460 $x + y = 1$

2461 $x + y = 1$

2462 $x + y = 1$

2463 $x + y = 1$

2464 $x + y = 1$

2465 $x + y = 1$

2466 $x + y = 1$

2467 $x + y = 1$

III Problemas do primeiro grau

- 2437 Um pai tem 45 anos e o filho 15. Daqui a quantos anos a idade do pai será 4 vezes a do filho?
- 2438 A soma de dois números é 36 e a diferença de seus quadrados é 60. Achar esses números.
- 2439 A diferença dos quadrados de dois números consecutivos é 20. Achar os dois números.
- 2440 Qual é a fração que vem a ser 1 quando a soma do numerador e do denominador é 1 $\frac{1}{4}$ quando se acrescenta a unidade no denominador?
- 2441 Dado um paralelepípedo retângulo cujas arestas são a , b e c . Calcular a área da base e o volume sabendo que as superfícies dos dois sólidos são iguais entre si. Achar a , b e c .
- 2442 É mole-din. De que a quanto tempo os ponteiros de um relógio formam um ângulo reto?
- 2443 O número 20 se escreve 20 num sistema de base desconhecida. Achar esta base.
- 2444 Dois corredores partem no mesmo lugar. Um deles dá a volta de 1 $\frac{1}{2}$ h e o outro de 2 $\frac{1}{2}$ h. Achar o tempo em que se encontram.
- 2445 Três homens jogam 1 $\frac{1}{2}$ e 2 $\frac{1}{2}$ e perdem juntos 10\$. Achar quantos ganhou cada um?
- 2446 Quando eu tinha a idade de 50, meu filho tinha 10. Achar a idade dele agora.
- 2447 Um algarismo das dezenas. Achar este número sabendo que por ele se pode dividir exatamente os algarismos das unidades e das centenas. Achar este número.
- 2448 Um número de 2 algarismos escrito no sistema decimal vale 7 por ser na base 10. Com a base 6, o número formado pelos mesmos algarismos vale 16 unidades menos do que o 1 $^{\circ}$. Achar este número.
- 2449 O número 20 está escrito em dois sistemas de numeração cujas bases diferem de duas unidades. Achar essas bases e o valor dos números.
- 2450 Reportar o número 20 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 3, 5, 7.
- 2451 Reportar o número 20 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3, 5, 7.
- 2452 Depois de duplicar um número e diminuir de 2 duplica-se de novo o resultado. Depois se tira 2, duplica-se o novo resultado terceira vez e vem 68 para resultado final. Qual é o número primitivo?

- 2453 Carla ganhou emprestando a juros simples a 5 % venceu 1 ano. Qual é essa quantia?
- 2454 Dados 4 pontos não em linha reta, une-se cada um a todos os outros e vêm 15 retas distintas. Calcular.
- 2455 É hoje dia daqui a quanto tempo os anos ponteiros de um relógio se repetirão?
- 2456 Misturam-se três espécies de vinho: a 300, a 500 e a 700 o litro de modo que a mistura valha 500 o litro. Como se faz a mistura?
- 2457 Gostei de uma quantia de 51\$ com notas de 25 e de 5\$. Quantas de cada espécie?
- 2458 Duas folhas correm ao vento durante 3 dias e a outra durante 2 e 4 dias, encostando entre si quando de 840. Qual é a quantidade de vento que fornece por dia cada folha?
- 2459 Casa de 70 m². O 1 $^{\circ}$ andar tem a metade do 2 $^{\circ}$ andar. O 2 $^{\circ}$ andar tem a metade do 3 $^{\circ}$ andar. O 3 $^{\circ}$ andar tem a metade do 4 $^{\circ}$ andar. Qual é o andar de cada um?
- 2460 Três operações devem fazer um total de 100. A primeira é 20, a segunda é 30, a terceira é 50. Achar o valor de cada uma para o fazer?
- 2461 Uma pessoa tem notas de 5\$ por valor de 2\$. Que quantia trocou se depois da operação tem 252 notas e 100\$?
- 2462 Um algarismo das dezenas. Achar este número sabendo que por ele se pode dividir exatamente os algarismos das unidades e das centenas. Achar este número.
- 2463 Um número de 2 algarismos escrito no sistema decimal vale 7 por ser na base 10. Com a base 6, o número formado pelos mesmos algarismos vale 16 unidades menos do que o 1 $^{\circ}$. Achar este número.
- 2464 O número 20 está escrito em dois sistemas de numeração cujas bases diferem de duas unidades. Achar essas bases e o valor dos números.
- 2465 Reportar o número 20 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 3, 5, 7.
- 2466 Reportar o número 20 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3, 5, 7.
- 2467 Depois de duplicar um número e diminuir de 2 duplica-se de novo o resultado. Depois se tira 2, duplica-se o novo resultado terceira vez e vem 68 para resultado final. Qual é o número primitivo?

2467. Entre que limites pode variar o 3º lado de um triângulo, se os outros têm 12 m e 20 m?

IV. Exercícios sobre os radicais.

Adaptar as raízes quadradas das expressões seguintes:

2468. $\sqrt{a^2 - b^2}$

2470. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2469. $\sqrt{(a+b)^2}$

2471. $\sqrt{25a^2 + 16b^2}$

Simplificar os radicais:

2472. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2474. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2473. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2475. $\sqrt{a^2 + b^2}$

Reduzir ao mesmo índice:

2476. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2478. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2477. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2479. $\sqrt{a^2 + b^2}$

Realizar as operações indicadas e reduzir:

2480. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2483. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2481. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2484. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2482. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2485. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2486. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2487. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2488. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2489. $\sqrt{a^2 + b^2}$

Simplificar os radicais:

2490. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2491. $\sqrt{a^2 + b^2}$

Reduzir:

2492. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2494. $\sqrt{a^2 + b^2}$

2493. $\sqrt{a^2 + b^2}$

Decompor em fatores:

2495. $a^2 + b^2$

2497. $a^2 + b^2$

2496. $1/a^2 + 1/b^2$

2498. $a^2 + b^2$

V. Exercícios sobre o segundo grau

Equações a resolver:

2499. $x^2 + x - 1 = 0$

2506. $x^2 + x - 1 = 0$

2500. $x^2 + x - 1 = 0$

2507. $x^2 + x - 1 = 0$

2501. $x^2 + x - 1 = 0$

2508. $x^2 + x - 1 = 0$

2502. $x^2 + x - 1 = 0$

2509. $6x^2 - 2bx + b^2 = 1$

2503. $x^2 + x - 1 = 0$

2510. $x^2 + x - 1 = 0$

2504. $x^2 + x - 1 = 0$

2511. $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{c}{d}$

2505. $x^2 + x - 1 = 0$

2512. $x^2 + x - 1 = 0$

2513. $x^2 + x - 1 = 0$

2514. $x^2 + (x-a)^2 = b$

2515. $x^2 + x - 1 = 0$

2516. $x^2 + x - 1 = 0$

2517. $x^2 + x - 1 = 0$

2518. $x^2 + x - 1 = 0$

2519. $x^2 + x - 1 = 0$

2520. $x^2 + x - 1 = 0$

2521. $x^2 + x - 1 = 0$

2522. $x^2 + x - 1 = 0$

2523. $x^2 + x - 1 = 0$

2524. $x^2 + x - 1 = 0$

2525. $x^2 + x - 1 = 0$

2526. $x^2 + x - 1 = 0$

2527. $x^2 + x - 1 = 0$

2528. $x^2 + x - 1 = 0$

2529. $x^2 + x - 1 = 0$

2530. $16x^2 - 8x + 1 = 0$

2531. $x^2 + x - 1 = 0$

2532. $x^2 + x - 1 = 0$

2533. $x^2 + x - 1 = 0$

2534. $x^2 + x - 1 = 0$

2535. $x^2 + x - 1 = 0$

2536. $x^2 + x - 1 = 0$

2537. $x^2 + x - 1 = 0$

2538. $x^2 + x - 1 = 0$

2539. $x^2 + x - 1 = 0$

2540. $x^2 + x - 1 = 0$

2541. $x^2 + x - 1 = 0$

2542. $x^2 + x - 1 = 0$

2543. $x^2 + x - 1 = 0$

2544. $x^2 + x - 1 = 0$

2545. $x^2 + x - 1 = 0$

2546. $x^2 + x - 1 = 0$

2547. $x^2 + x - 1 = 0$

2548. $x^2 + x - 1 = 0$

2549. $x^2 + x - 1 = 0$

2550. $x^2 + x - 1 = 0$

2551. $x^2 + x - 1 = 0$

2552. $x^2 + x - 1 = 0$

2553. $x^2 + x - 1 = 0$

2554. $x^2 + x - 1 = 0$

2555. $x^2 + x - 1 = 0$

2556. $x^2 + x - 1 = 0$

2557. $x^2 + x - 1 = 0$

2558. $x^2 + x - 1 = 0$

2559. $x^2 + x - 1 = 0$

2560. $x^2 + x - 1 = 0$

2561. $x^2 + x - 1 = 0$

2562. $x^2 + x - 1 = 0$

2563. $x^2 + x - 1 = 0$

2564. $x^2 + x - 1 = 0$

Dada a equação $x^2 + px + q = 0$ achar em função de p e de q os valores de x_1 e x_2 .

$$2538. \quad x^2 + x - 12 = 0$$

$$2539. \quad x^2 + x - 12 = 0$$

Dada a equação $x^2 + px + 120 = 0$ determinar p de modo que

$$2542. \quad x_1 = 10$$

$$2543. \quad x_1 = 10$$

$$2544. \quad x_1 = 10$$

$$2540. \quad x_1 = 10$$

$$2541. \quad x_1 = 10$$

$$2546. \quad x_1^2 + x_2^2 = 2500$$

$$2547. \quad x_1^2 + x_2^2 = 700$$

$$2548. \quad x_1^2 + x_2^2 = 1076$$

$$2549. \quad x_1^2 + x_2^2 = 1076$$

$$2550. \quad x_1^2 + x_2^2 = 1076$$

$$2551. \quad x_1^2 + x_2^2 = 1076$$

$$2552. \quad x_1^2 + x_2^2 = 1076$$

$$2553. \quad x_1^2 + x_2^2 = 1076$$

$$2554. \quad x_1^2 + x_2^2 = 1076$$

$$2555. \quad x_1^2 + x_2^2 = 1076$$

Resolva as equações seguintes:

$$2556. \quad x^2 - 70x + 1200 = 0$$

$$2557. \quad x^2 + 12x + 32 = 0$$

$$2558. \quad x^2 - 84x + 224 = 0$$

$$2559. \quad x^2 - 22x + 12 = 0$$

Uma vez as equações quadradas seguintes:

$$2560. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2561. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2562. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2563. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

Resolva as equações seguintes:

$$2564. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2565. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2566. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2567. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2568. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2569. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2570. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2571. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2572. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2573. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2574. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2575. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2576. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2577. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2578. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$2579. \quad x^2 - 18x + 72 = 0$$

2. Problemas sobre o segundo grau

2570. As duas raízes de uma equação do 2º grau são por diferença 10 e por produto $\left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2$. Calcular as duas raízes.

2571. Na equação $x^2 + y^2 - 3x - 9y + 1 = 0$, que valor se deve dar a y para que esta equação, resolvida em relação a x , tenha raízes iguais?

2572. Que valor se deve dar a x para que o triângulo $x^2 - 2x + 1$ seja superior a 10?

2573. Quais as formas se devem tomar na progressão

$$a, 2, 10, 14$$

para que a soma das séries seja 50?

2574. Um relógio com ponteiro minuto gira ao redor de um ponto central. O ponteiro minuto gira 60° em 1 hora. Quanto tempo leva o ponteiro minuto para girar 360°?

2575. A soma das raízes de uma equação do 2º grau é 10 e o produto é 21. Qual é a equação?

2576. A soma das raízes de uma equação do 2º grau é 10 e o produto é 21. Qual é a equação?

2577.

2578. Resolver as equações

$$x + y = 10, \quad xy(x^2 + y^2) = 100$$

2579. Resolver as equações

$$x + y = 10, \quad xy(x^2 + y^2) = 100$$

2580. Resolver as equações

$$x + y = 10, \quad xy(x^2 + y^2) = 100$$

2581. Resolver as equações

$$x + y = 10, \quad xy(x^2 + y^2) = 100$$

2582. Qual é o valor de x para que as raízes sejam precisamente p e q ?

$$2583. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2584. \quad \text{Qual é a soma das raízes da equação } x^2 - 10x + 21 = 0?$$

$$2585. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2586. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2587. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2588. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2589. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2590. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2591. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2592. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2593. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2594. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2595. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2596. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2597. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2598. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2599. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

$$2600. \quad \text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y = 10 \\ xy(x^2 + y^2) = 100 \end{cases}$$

2590 Q. n. 8.º Capital x , empregado durante 5 anos a juros de 2,0% ao ano, a tais de que se tornou $1,10x$.

PONTOS SUPLEMENTARES

I. Raiz algebrica em geral particularmente a raiz quadrada \sqrt{a}

1. Raiz quadrada de um polinomio

$$a^2 + b^2 = 2ab + a^2 + b^2$$

$$25a^2 + 4b^2 = 5a^2 + 4b^2 + 20ab$$

2. Raiz quadrada de um polinomio qualquer

A operação está acabada quando o resto é nulo

215. Seja $x^2 + 2x + 1$

Sabemos que o primeiro termo da raiz neste polinomio, provem da raiz quadrada da multiplicação por si mesmo do 1.º termo da raiz procurada

Portanto o 1.º termo da raiz é $\sqrt{9a^2} = 3a$

Faz-se o quadrado do 3.º, e subtrahido ao polinomio os 9a² achados, vem o resto

$$12a^2 + 34ab + 25b^2$$

Seja B o coeficiente dos termos desconhecidos da raiz; esta raiz será então $3a^2 + B$ e teremos:

$$9a^2 + 12a^2 + 34ab + 25b^2 = (3a^2 + B)^2 = 9a^4 + 6a^2B + B^2$$

donde simplificando:

$$12a^2 + 34ab + 25b^2 = 6a^2B + B^2$$

Seja C a parte ainda desconhecida da raiz; esta raiz será $3a^2 + B + C$ e teremos:

2.º termo da raiz será pois,

$$12a^2 + 34ab + 25b^2 = 2a$$

Seja D a parte ainda desconhecida da raiz; esta raiz será $3a^2 + 2a + D$ e teremos:

$$12a^2 + 34ab + 25b^2 = 30a^2 + 20a + D$$

Seja E a parte ainda desconhecida da raiz; esta raiz será $3a^2 + 2a + D + E$ e teremos:

$$9a^2 + 12a^2 + 34ab + 25b^2 = 30a^2 + 20a + D + E$$

ou, simplificando

$$30a^2 + 20a + 25 = E(2a^2 + 2a + C)$$

Seja F a parte ainda desconhecida da raiz; esta raiz será $3a^2 + 2a + D + E + F$ e teremos:

Sejam a, b, c , os quocientes de $A \div B \div R$ por D temos, dividindo todos os termos por D

$$r = bQ + r$$

Ora, b e r são primos entre si porque, se não o fossem, admitiriam um divisor comum q e dividiríamos $bQ + r$ por q e o resto seria, portanto, menor que b e r . Logo não seria o máximo c. d. entre A e B .

b e r , sendo primos entre si, segue-se que D é o m. c. d. entre B e R , assim como o é já entre A e R .

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

1. 2. Monômios. Achar o m. c. d. de

$$270a^4b^2x^3 \text{ e } 180a^3b^2x^4$$

1º O m. c. d. de 270 e 180 é 90 e fornecido pela aritmética (Ver curso médio, nº 278 e nº 300)

2º O m. c. d. de

$$a^4b^2x^3 \text{ e } a^3b^2x^4 \text{ é } a^3b^2x^3$$

Portanto, o m. c. d. das duas quantidades propostas é

$$90a^3b^2x^3$$

323. Polinômios. Achar o m. c. d. dos dois polinômios seguintes

$$X = 10a^2bx^3 - 20a^2bx^2 - 30a^4bx + 60a^4b$$

$$Y = 30a^3b^2x^2 - 15a^4b^2x - 30a^5b^2$$

Observamos que

$$X = 10a^2b(x^3 - 2ax^2 - 3a^2x + 6a^3)$$

$$\text{e } Y = 15a^3b^2(2x^2 - 3ax - 2a^2)$$

Ora, o m. c. d. de $10a^2b$ e $15a^3b^2$ é $5a^2b$, será, pois, o 1º factor do m. c. d. dos polinômios propostos X e Y .
Fazemos agora,

$$A = x^3 - 2ax^2 - 3a^2x + 6a^3$$

$$\text{e } B = 2x^2 - 3ax - 2a^2$$

Resta achar o m. c. d. de A e B por divisões sucessivas racionando como segue:

Se B dividir A , B será o m. c. d. entre A e B , porque nenhum polinômio de grau superior ao de B pode dividir A e B juntos.

Se B não dividir A , o m. c. d. entre A e B será o mesmo que entre B e o resto da divisão (Nº 321).

Somos, pois, levados a dividir A por B .

Antes de facilitar esta divisão, multiplicamos A por 2 (nº 320) e temos:

Primeira divisão.

$$\begin{array}{r} 2A \text{ ou } 2x^3 - 4ax^2 - 6a^2x + 12a^3 \\ 2x^2 - 3ax - 2a^2 \overline{) 2x^3 - 4ax^2 - 6a^2x + 12a^3} \\ \underline{2x^3 - 3ax^2 - 2a^2x - 2a^3} \\ -ax^2 - 4a^2x + 14a^3 \end{array}$$

Primeiro resto

o resto dividido pelo factor 2

Multiplicação por 2

$$\begin{array}{r} -ax^2 - 4a^2x + 14a^3 \\ 2x^2 - 3ax - 2a^2 \overline{) -ax^2 - 4a^2x + 14a^3} \\ \underline{-2x^2 + 3ax + 2a^2} \\ 7ax - 12a^3 \end{array}$$

segundo resto

Divisão por $7ax - 12a^3$

$$\begin{array}{r} 7ax - 12a^3 \\ 7ax - 12a^3 \overline{) 7ax - 12a^3} \\ \underline{7ax - 12a^3} \\ 0 \end{array}$$

Temos, pois, que A e o resto $-ax^2 - 4a^2x + 12a^3$, este resto dividido pelo factor 2, podemos significar por esse factor 2 o multiplicado por 2 para facilitar a divisão (nº 320). Temos, pois, o 2º termo do quociente — 1 e o resto $-11ax + 22a^3$.

Este resto é divisível igualmente por $7ax - 12a^3$, podemos significar por $11a$, no 3º termo do quociente por $11a$ para tornar possível primeiro termo.

Vamos, portanto, que B não divide A e não é o m. c. d. entre A e B . Mas, nº 321 o m. c. d. de A e B é o mesmo que o de B e $2a - 2a$, resto da divisão.

Somos, pois, levados a dividir B por $x - 2a$, e temos:

segunda divisão.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3ax - 2a^2 \text{ e } 2a \\ 2x^2 + 4ax \overline{) 2x^2 - 3ax - 2a^2} \\ \underline{2x^2 + 4ax} \\ -7ax - 2a^2 \\ \underline{-7ax - 14a^2} \\ 12a^2 \\ \underline{12a^2} \\ 0 \end{array}$$

Esta divisão é exata, e prova que $x - 2a$ é o m. c. d. entre B e $x - 2a$, esta quantidade é também o m. c. d. entre A e B (nº 321).

Portanto, o m. c. d. entre os polinômios X e Y será.

$$5a^2b(x - 2a) = 5a^2bx - 10a^3b$$

2. Regra — Para se calcular o m. o. d. de dois polinômios ordenados em relação a uma letra, é preciso

1.º Procurar os menores divisores de cada polinômio, e pô-los em evidência em cada um dos polinômios, o m. o. d. destes dois será o 1.º factor do m. o. d. procurado.

2.º Procurar o m. o. d. dos quocientes entre parênteses pelo método dos divisões successas até m. o. d. será o segundo factor do m. o. d. procurado.

3.º Dividir os dois factores respectivamente.

Em cada um dos passos, sempre que se estiver de par que quer momento que não seja actor do

Se a 1.ª forma de cada dividendo parcial não for divisível pelo

2.º termo do divisor, então, p. en. se o dividendo pelo factor.

Seja para tornar a divisão exata, com tudo que não seja

EXERCÍCIOS SOBRE O M. O. D.

Adaptar o m. o. d. das expressões seg. a m. o. d.

| | | | |
|------|--------------------------------------|------|------------------------|
| 23.0 | | 2312 | |
| 2317 | $15x^3y^2 + 12x^2y^3 + 9xy^4$ | 2318 | $120m^2n^3 + 90m^3n^2$ |
| 2314 | $2x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ | | |
| 2315 | $x^3 - 1$ | 2317 | x^3 |
| 2316 | $x^3 - 1$ | 2318 | x^3 |
| 2319 | $2x^3y^2 - 25x^2y^3 + 75xy^4 - 5y^5$ | | |

III. Sobre as séries.

Uma série é uma successão de termos em um certo termo da qual se forma a seguinte serie fixa:

As progressões arith. e geométricas são séries

330. Uma série é convergente quando a soma de seus termos tende para um limite fixo e definido.

Uma série é divergente quando a soma de seus termos vai aumentando indefinidamente.

Se a soma de uma série converge para um valor fixo, então a soma de seus termos converge para esse valor.

IV. Regras de convergência das séries

337. Regra I. — Uma série é convergente quando seus termos tendem para zero, e o valor absoluto, menor do que os termos da mesma série convergente cujos termos tendem para zero.

Esta proposição é evidente, cada termo da primeira série sendo menor que o correspondente da segunda.

338. Regra II. — Uma série é convergente se a partir de certo termo a soma dos termos da série for sempre menor que um limite inferior a 1.

Seja a serie

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+1} + \dots$$

na qual tomamos

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+1} + \dots$$

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+1} + \dots$$

Se a soma dos termos da serie for sempre menor que um limite inferior a 1, então a serie é convergente.

Se a soma dos termos da serie for sempre maior que um limite superior a 1, então a serie é divergente.

Se a soma dos termos da serie for sempre menor que um limite inferior a 1, então a serie é convergente.

A serie convergente.

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+1} + \dots$$

Se a soma dos termos da serie for sempre menor que um limite inferior a 1, então a serie é convergente.

Se a soma dos termos da serie for sempre maior que um limite superior a 1, então a serie é divergente.

Se a soma dos termos da serie for sempre menor que um limite inferior a 1, então a serie é convergente.

Se a soma dos termos da serie for sempre menor que um limite inferior a 1, então a serie é convergente.

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+1} + \dots$$

Se a soma dos termos da serie for sempre menor que um limite inferior a 1, então a serie é convergente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$$

A serie dada é, pois, convergente (p. 338).

339. Regra III. — Uma serie de termos positivos é convergente se para um certo termo a soma dos termos da serie for sempre menor que um limite inferior a 1.

Seja a série

$$L = U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_{n+p} + \dots$$

na qual temos, a partir da ordem n ,

$$|U_n| < R \text{ e } R < 1$$

Temos pois

$$|U_n| < R^n, \quad |U_{n+1}| < R^{n+1}, \quad |U_{n+2}| < R^{n+2}, \dots$$

Agora, a partir de U_n , a soma dos termos $U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \dots$ é menor que a soma dos termos da progressão geométrica $R^n + R^{n+1} + R^{n+2} + \dots$ a qual é convergente, pois $R < 1$.

Portanto, a série L é realmente convergente (n.º 327).

Observação. — Se o limite de $\sqrt[n]{|U_n|}$ for maior que 1, a série não é convergente.

335. Exemplo. A série logarithmica

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots$$

é convergente para
com efeito temos

$$|U_n| = \frac{x^n}{2^n}; \text{ donde, } \sqrt[n]{|U_n|} = \frac{x}{2}.$$

Como a raiz n ª de qualquer numero positivo tende para o infinito, vê-se que o limite do termo $\sqrt[n]{|U_n|}$, para $n \rightarrow \infty$, é

E temos, para $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \frac{x}{2}.$$

A série logarithmica será, pois, convergente, se o limite x for menor que 1 em valor absoluto, ou se $-1 < x < 1$ (n.º 331).

336. Regra IV. — Uma série formada de termos positivos e de termos negativos é convergente, se tomando-se em valor absoluto, a nova série é convergente.

Seja a soma $L = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ e seja tambem R a soma dos termos positivos e $-S$ a soma dos termos negativos a partir da ordem 1.ª.

Temos

$$R - S = J_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \dots$$

Por hypothese, $R + S$ converge e o mesmo ha de acontecer para $R - S$ que é menor com evidencia.

Logo a serie U é convergente.

337. Exemplo. A serie:

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{32} + \dots$$

é convergente, seja qual for o valor de x .

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{32} + \dots$$

se tem

$$\frac{x^n}{2^n} = \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

o que vimos que esta serie é convergente para qualquer valor de x (n.º 340).

Regra V. — Uma serie é convergente se seus termos, a partir de certa ordem, tem sempre alternativamente positivos e negativos e são limitados de modo a ter 0 como limite.

Seja a serie $1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$ e os termos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ são alternativos e $-b, +c, -d, +e, -f, \dots$ os seguintes termos.

Tomando como se a aproximação da serie a soma dos termos que precedem a_n e designando o erro por ϵ , vamos determinar que se tem para ϵ pequeno.

tem-se, de facto

$$\epsilon = +a_n - b + c - d + e - f + \dots$$

e, portanto

$$\epsilon = +[a_n - b] + [c - d] + [e - f] + \dots$$

os termos $a_n, b, c, d, e, f, \dots$ são todos positivos e menores que 1, logo ϵ é menor que 1 em valor absoluto.

Logo a serie é convergente.

Logo, a serie é convergente.

336. Exemplo. — A série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

é convergente

Com efeito, seus termos são alternativamente positivos e negativos, e $\frac{1}{2^n}$ tende para 0 quando $n = \infty$

Y Número e.

337. — Seja a série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

Esta soma representa-se pela letra e .

338. Teorema I. — A série é convergente. Com efeito, temos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

forn

e no limite, para $n = \infty$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

Logo a série e é convergente.

Esta soma é um caso particular de uma soma geométrica, em que se faz $x = \frac{1}{2}$.

339. Teorema II. — O número e é < 2.

Com efeito, seus termos depois do 1º são respectivamente menores que os da progressão geométrica

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

que é decrescente e tem o limite 2 ($n^\circ 361$).

$$340. \text{ Cálculo de } e = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

Os dois primeiros termos têm a soma $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ O 3º termo vale $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ou $0,75$ Dividindo o 3º termo por 2, vem o 4º, que é $\frac{1}{8}$ ou $0,125$ Dividindo o 4º termo por 2, vem o 5º, que é $\frac{1}{16}$ ou $0,0625$

assim por diante.

O cálculo dá o valor: $e = 2,7182818284590$

341. Teorema III. — O número e não pode ser inteiro. Com efeito, o número e é superior a 2 e inferior a 3

342. Teorema IV. — O número e não pode ser fraccionário. Se o fôsse, teríamos:

$$e = \frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{q} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{4q} - \frac{1}{8q} + \dots$$

em que p e q são dois inteiros.Multiplicando todo por $2q$, vem

$$2p - q = 2q - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots \quad (1)$$

o que dá

$$2p - q = 2q - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$2p - q < 2q - 1 + \frac{1}{2} \quad \text{ou} < \frac{1}{2}(4q - 1)$$

achamos que o 1º membro de (1), ou 2.º, $(q-1)p$ seria

$$1 < (q-1)p < \frac{1}{2}(4q-1)$$

$$1 < (q-1)p < 2q - \frac{1}{2}$$

$$1 < (q-1)p < 2q - 0,5$$

$$1 < (q-1)p < 2q - 0,5$$

$$1 < (q-1)p < 2q - 0,5$$

$$1 < (q-1)p < 2q - 0,5$$

$$1 < (q-1)p < 2q - 0,5$$

Esta equação deve verificar-se seja qual for o valor de x , logo pôe-se nas seguintes, nº 348)

$$Aa = 0, \quad \text{donde} \quad A = \frac{a}{b}$$

$$Ba = 0; \quad \text{donde} \quad B = \frac{a^2}{b^2}$$

$$Ca = 0, \quad \text{donde} \quad C = \frac{a^3}{b^3}$$

$$Da + Ce = 0 \quad \text{donde} \quad D = \frac{a^4}{b^4} - \frac{e}{b}$$

e assim por diante

Logo temos

$$b = ax + \frac{b}{b^2} = \frac{ax^2 + b}{b^2}$$

352 Observação. Se daria logo a mesma coisa

PROBLEMAS SOBRE OS COEFICIENTES INDETERMINADOS

3020. Pelos coeficientes indeterminados calcular p, q, m e n de modo que $x^4 + 1$ seja o produto de $x^2 + px + q$ por $x^2 + mx + n$

3021. Determinar p, q, m e n de modo que $x^4 + px^2 + q$ seja o produto de $x^2 + bx + 5$ por $x^2 + mx + n$.

3022. Determinar a, b, m, n, p e q de modo que $ax^4 - bx^3 + 1$ seja o produto de $(x-1)^2$ por $mx^2 + nx^2 + px + q$.

3023. Dêr a fração

isto é, calcular A, B, a e b .

3024. Achar as condições para que a fração $\frac{ax+b}{x^2-x-b}$ conserve o mesmo valor, seja qual for o valor de x

3025. Achar as condições para que a fração $\frac{ax+b}{x^2-x-b}$ seja independente da variável x .

3026. Determinar m e n de modo que o polinômio $x^3 - 3x^2 + mx + n$ seja divisível por $x^2 - 2x + 1$. Indicar o quociente.

3027. Determinar m de modo que os polinômios

$$1^\circ x^2 + mx^2 + a^2$$

$$2^\circ x^2 + mx^2 + 1 - x - x^2$$

sejam divisíveis por $x^2 - ax + a^2$. Indicar os quocientes.

3028. Determinar p e q de modo que $x^3 + px^2 + q$ seja divisível por $x^2 - 2x - 5$. Indicar p e q .

3029. Determinar m, n, p de modo que $x^3 - 2x^2 - 6x^2 + mx^2 - nx + p$ seja divisível por $(x-3)(x-1)(x-1)$. Dar o quociente.

VIII. Equação exponencial

$$\text{Definição.} \quad a^x = b \quad \text{é a equação exponencial}$$

Exemplo

$$a^x = b; \quad a^x - 2x - 1 = 0; \quad a^{x^2 - 2x + 1} = d$$

são equações exponenciais de 1º grau, porque só o 1º expoente contém a incógnita.

354 Equação exponencial de 2º grau é a que tem por expoente uma expressão do 1º grau.

Exemplos

Resolução da equação $a^{x^2+b} = c$.

355. 1º Método, por meio dos logaritmos. — Temos logo tomando os logaritmos dos dois membros

$$x \log a = \log c$$

Donde :

$$x = \frac{\log c}{\log a}$$

356. 2º Método, por meio das frações contínuas. — Seja resolver a equação

$$2^x = 6, \quad (1)$$

Fazendo sucessivamente $x=0, 1, 2, 3, \dots$ temos

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

Portanto, x é superior a 2 e inferior a 3.
Façamos

$$x = 2 + \frac{1}{y};$$

vem

$$2^{2+\frac{1}{y}} = 6 \quad \text{ou} \quad 2^2 \times 2^{\frac{1}{y}} = 6;$$

donde

$$2^{\frac{1}{y}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2};$$

donde finalmente

$$\left(\frac{3}{2}\right)^y = 2; \quad (2)$$

equação semelhante á equação (1).

Façamos também sucessivamente $y=0, 1, 2, 3, \dots$ vem

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1 < 2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1\frac{1}{2} < 2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} > 2$$

Portanto, na equação (2), y é superior a 1, mas inferior a 2.

Como acima, façamos $y = 1 + \frac{1}{z}$, a equação (2) dá :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{z}} = 2,$$

ou

$$\frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}} = 2,$$

donde

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}} = \frac{4}{3};$$

donde finalmente

$$\left(\frac{4}{3}\right)^z = \frac{3}{2}. \quad (3)$$

equação analoga ás equações (1) e (2).

Façamos também sucessivamente $z=0, 1, 2, 3, \dots$ vem

$$\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1 < \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 = 1\frac{1}{3} < \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9} > \frac{3}{2}$$

Portanto, na equação (3), z é superior a 1 e inferior a 2.

Como acima, façamos $z = 1 + \frac{1}{u}$, a equação (3) dá :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{u}} = \frac{3}{2},$$

ou

$$\frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{3}{2};$$

donde

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{9}{8};$$

donde finalmente

$$\left(\frac{8}{9}\right)^u = \frac{4}{3}. \quad (4)$$

equação analoga ás equações (1), (2) e (3).

Façamos também sucessivamente $u=0, 1, 2, 3, \dots$ vem :

$$\left(\frac{8}{9}\right)^0 = 1 < \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^1 = 1\frac{1}{8} < \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81} = 1\frac{17}{81} < \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{512}{729} = 1\frac{217}{729} > \frac{4}{3}$$

Portanto, u é superior a 2 e inferior a 3.

Como acima, façamos $u = 2 + \frac{1}{v}$, a equação (4) dá :

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{2+\frac{1}{v}} = \frac{4}{3}.$$

ou

$$\left(\frac{9}{8}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{3};$$

donde

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{4}{x}} = \frac{256}{243};$$

donde finalmente

$$\left(\frac{256}{243}\right)^x = \frac{9}{8}. \quad (b)$$

equação análoga às equações (1), (2), (3) e (4).

Temos obtido sucessivamente:

$$x = 2 + \frac{1}{y}; \quad y = 1 + \frac{1}{z}; \quad z = 1 + \frac{1}{u}; \quad u = 2 + \frac{1}{v}.$$

Para o valor de x , teremos a fração contínua

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

(Vêr Arithm. F. T. D. curso médio nº 346),
cuja reduzida sucessivas são:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{13}{5},$$

são os valores aproximados de x .

357. Observação. — Sabe-se que o erro é menor do que a unidade dividida pelo quadrado do denominador da última reduzida.

Assim, tomando $x = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$, o erro é menor do que $\frac{1}{5^2}$ ou $< \frac{1}{25}$.

PROBLEMAS SOBRE AS EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Resolver as equações seguintes:

- | | |
|--|--|
| 2030. $(a^x)^x = (a^{1/x})^x$ | 2043. $3^x = 8551$ |
| 2031. $(a^x)^x = (a^{1/x})^x$ | 2044. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 20$ |
| 2032. $a^{(x-x)^2} = a^{1-x}$ | 2045. $3^x = 729$ |
| 2033. $(7^{x-2})^{4-x} = 1$ | 2046. $2^{x^{1-x}} = 10\,000$ |
| 2034. $(10^{x-3})^{1-x} = 1$ | 2047. $8\sqrt{x} = 2\,187$ |
| 2035. $(12^{x-x})^{2-x} = 144$ | 2048. $3^{x^2-2x} = 81$ |
| 2036. $\sqrt{7} = 7^x$ | 2049. $x^{x^2-10x+16} = 1$ |
| 2037. $a^2 a^x = \sqrt{a^4}$ | 2050. $5^{x^2-4x-4} = 125$ |
| 2038. $2x^2 - 4x = -48$ | 2051. $5^{x^2-9x-30} = 729$ |
| 2039. $\log x = \log 48 - \log 6$ | 2052. $2 \cdot 3^{x^2} = 24$ |
| 2040. $5 \log x = \log 288 + 3 \log \frac{x}{2}$ | 2053. $3^{x^2+4x-1} = 18$ |
| 2041. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ | 2054. $7^{x^2} = 6,7^2 + 5 = 0$ |
| 2042. $\begin{cases} \log \sqrt{x} - \log \sqrt{5} = 0,5 \\ 3 \log x - 2 \log 5 = 1,50515 \end{cases}$ | 2055. $a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^x = b$ |
| | 2056. $a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^{x^2} = b$ |
| | 2057. $a, a^2, a^4, a^8, \dots, a^{2^x} = b$ |

IX. Teoria algébrica dos logaritmos.

358. Seja a equação exponencial

$$a^x = y,$$

em que a é numero positivo constante e y , qualquer numero positivo; por definição, x é o logaritmo de y no sistema de base a .

Fazendo sucessivamente

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

vem

$$y = 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \dots$$

Os valores de y maiores do que 1 têm por logaritmos números inteiros ou fracionarios, mas positivos; e x é tanto maior quanto maior for y .

Fazendo sucessivamente

$$x = 0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots$$

vem

$$y = 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}, \dots$$

Os valores de y menores do que 1 têm por logaritmos números negativos e tanto menores quanto mais o valor de y tende para 0.

359. Como no n.º 268, os logaritmos são, pois, os termos de uma progressão aritmética começando por 0, e correspondentes termo a termo aos números de uma progressão geométrica começando por 1.

A progressão geométrica, no sistema de base a , é:

$$\frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$$

e os termos correspondentes da progressão aritmética, isto é, os logaritmos dos números precedentes, são:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

360. As quatro propriedades fundamentais dos logaritmos (n.º 271) deduzem-se do mesmo modo.

O log. do produto de varios factores iguala a soma dos logaritmos dos factores.

Com efeito, seja por exemplo:

$$y = a^x; y' = a^{x'} \text{ e } y'' = a^{x''}.$$

Temos

$$y \cdot y' \cdot y'' = a^{x+x'+x''};$$

donde se vê que:

$$\log(y \cdot y' \cdot y'') = x + x' + x'' = \log y + \log y' + \log y''.$$

E assim por diante para as 3 outras propriedades.

INDICE DAS MATERIAS

CALCULO ALGEBRICO

| | Página |
|--|--------|
| Números algebricos | 5 |
| Exercícios | 18 |
| CAPITULO I. — Generalidades | 12 |
| Exercícios a resolver | 26 |
| CAPITULO II. — Adição e subtração na algebra | 28 |
| Exercícios a resolver | 32 |
| CAPITULO III. — Multiplicação algebraica | 34 |
| Exercícios e problemas a resolver | 37 |
| CAPITULO IV. — Multiplicação dos polinómios | 39 |
| Exercícios a resolver | 45 |
| CAPITULO V. — Divisão algebraica | 47 |
| Exercícios a resolver | 51 |
| CAPITULO VI. — Divisão dos polinómios | 53 |
| Exercícios a resolver | 59 |
| CAPITULO VII. — Das frações algebraicas | 61 |
| Exercícios a resolver | 69 |

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

| | |
|--|-----|
| CAPITULO I. — Equações do 1.º grau a uma incognita | 74 |
| Exercícios a resolver | 79 |
| CAPITULO II. — Problemas de 1.º grau a uma incognita | 82 |
| Problemas a resolver | 85 |
| CAPITULO III. — Equações a varias incognitas | 82 |
| Exercícios a resolver | 102 |
| CAPITULO IV. — Problema a varias incognitas | 106 |
| Problemas a resolver | 109 |
| CAPITULO V. — Discussão | 111 |

| | |
|--|-----|
| CAPÍTULO VI. — Distinções..... | 124 |
| Exercícios | 127 |
| CAPÍTULO VII. — Análise indeterminada do 1.º grau..... | 128 |
| Exercícios | 134 |

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRÁU

| | |
|--|-----|
| CAPÍTULO I. — Dos radicais..... | 136 |
| Exercícios sobre os radicais..... | 143 |
| CAPÍTULO II. — Resolução da equação do 2.º grau..... | 148 |
| Exercícios a resolver..... | 155 |
| CAPÍTULO III. — Propriedades e discussão das raízes..... | 158 |
| Exercícios sobre as propriedades das raízes..... | 166 |
| CAPÍTULO IV. — Problemas do 2.º grau..... | 168 |
| Equações e problemas do segundo grau a resolver..... | 179 |
| CAPÍTULO V. — Distinção do 2.º grau..... | 184 |
| Exercícios sobre o trinómio..... | 193 |
| CAPÍTULO VI. — Variação de funções..... | 197 |

PROGRESSÕES E LOGARITMOS

| | |
|--|-----|
| CAPÍTULO I. — Das progressões aritméticas..... | 231 |
| CAPÍTULO II. — Das progressões geométricas..... | 239 |
| CAPÍTULO III. — Propriedades dos logaritmos..... | 248 |
| CAPÍTULO IV. — Emprego das taboas de logaritmos..... | 261 |
| CAPÍTULO V. — Juros compostos e anuidades..... | 278 |
| CAPÍTULO VI. — Exercícios e problemas de recapitulação.... | 294 |

FONTES SUPLEMENTARES

| | |
|--|-----|
| CAPÍTULO I. — Raiz algébrica em geral, particularmente
raiz quadrada..... | 305 |
| II. Máximo divisor comum..... | 319 |
| III. Noções sobre séries..... | 312 |
| IV. Regras de convergência das séries..... | 312 |
| V. O euzenete..... | 316 |
| VI. Desenvolvimento em série..... | 318 |
| VII. Método dos coeficientes indeterminados..... | 318 |
| VIII. Equação exponencial..... | 321 |
| IX. Teoria algébrica dos logaritmos..... | 325 |